

Math. P.
147.ch

Math. P.

Haas

147 ch 4°

Versuch
einer Darstellung der Geschichte
des
K r ü m m u n g s m a s s e s .

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung
der
Doctorwürde in den Naturwissenschaften
der
hohen naturwissenschaftlichen Facultät
in T ü b i n g e n
vorgelegt von
August Haas.



Tübingen
Druck von Ludwig Friedrich Fues
1881.

„Ab his via sternitur ad maiora.“

Gauss IV. 189.



Literatur-Nachweisungen.

- 1) HUYGHENS, Opera varia. Horologii oscillatorii Pars III. Propositio XI. Data linea curva, invenire alium cujus evolutione illa describatur etc.
- 2) Solutio problematis de linea in quam flexile se pondere etc. pag. 291.
- 3) LEIBNITZ, De natura anguli contactus et osculi. Acta Eruditorum 1686.
- 4) JACOB BERNOULLI, Additamentum etc. Acta Erud. 1692.
- 5) Specimen calculi differentialis. Acta Erud. 1691.
- 6) Curva laminae elasticae. Radii circulorum osculantium etc. Acta Erud. 1694. Januar.
- 7) LEIBNITZ, Acta Erud. 1692.
- 8) Acta Erud. 1695. Addenda ad D. G. G. Schediasma.
- 9) Leibnitzens Schriften, herausgegeben von C. J. Gerhardt. III. Band 1. X. Brief etc.
- 10) NEWTON, Principia mathematica I. Liber. Propositio X. XIII. II. Liber Prop. X. etc.
- 11) Methodus fluxionum. Probl. V. 1671 verfasst, 1736 gedruckt. Conf. Suter, Geschichte der Mathematik II. B. pag. 75 ff.
- 12) Methodus fluxionum Probl. VI.
- 13) Suter, Geschichte der Math. pag. 314.
- 14) LAGRANGE, Theorie des fonctions, Paris 1796.
- 15) Le Barbier, Annales de Mathématiques 1831.
- 16) Grunert Klügel, Mathematisches Wörterbuch. Ergänzungsband.
- 17) CLAIRAUT. Conf. Suter pag. 258.
- 18) MONGE, Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différentes genres d'inflexions etc. Paris 1771.
- 19) TINSEAU, Solution de quelques problèmes relatifs à la theorie des surfaces courbes etc. Mémoire de l' Académie IX. Tome.
- 20) Jacobi in Crelle's Journal, Band 14.
- 21) FOURIER, Mémoires présentés à l'institut. Tome I. 1805 pag. 420.
- 22) LANCRET, Mémoire sur les courbes à double courbure. T. I. II. Mémoires présentés à l'institut. etc.
- 23) LIOUVILLE Monge, Application à l'analyse pag. 554—558. 576.
- 24) OLIVIER, Journal de l'école polytechnique. Cahier 24.
- 25) HAMILTON, Elements of Quaternions.
- 26) EULER, Recherches sur les courbes des surfaces. Histoire de l'académie royale à Berlin 1760.
- 27) Conf. Weyr. Mathemat. Annalen Bd. 3. Construction der Normalschnitte und ihrer Radien aus 3 Normalschnitten.
- 28) MEUSNIER, Mémoire sur la courbure des surfaces 1776. Mémoires de l'académie royale des sciences Tome X.

- 29) OLIVIER, Journal de l'école polyt. Cahier 25.
- 30) MONGE, Application de l'analyse etc. pag. 124.
- 31) DUPIN, Développements de géometrie. Paris 1813.
- 32) GERMAIN, Crelle's Journal Band VII. Bulletin des sciences math. 1831.
- 33) GAUSS, Disquisitiones generales circa superficies curvas.
- 34) Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables etc. Journal de l'école polyt. 24. Cahier pag. 209.
- 35) NAVIER, Differenzialrechnung II. Bd. pag. 304.
- 36) BALTZER, Ableitg. der Gauss'schen Formeln für die Flächenkrümmung. Leipziger Berichte 1872 pag. 113.
- 37) Salmon-Fiedler, Analyt. Geometrie des Raums. III. Aufl. II. Theil pag. 288. Conf. Beez, Zeitschrift für Math. und Physik. 20. Band pag. 433.
- 38) LIOUVILLE, Journal de l'école polyt. Cahier 24 pag. 222. Wegen des Beweises siehe Chelini, Annali di Scienze Matematiche. Tortolini 1851 und Beltrami, Ricerche di analisi etc. Napoli 1865.
- 39) v. ESCHERICH, Ableitung des allgemeinen Ausdrucks für das Kr.-Mass. Archiv für Math. und Physik. 57. Band S. 395.
- 40) Liouville in Monge, Application à l'analyse pag. 589.
- 41) Gauss, Astronomische Abhandlungen von Schuhmacher 1825. Heft 3.
- 42) Liouville, Sur un théorème de M. Gauss etc. Journal de l'école polyt. 12 Cah. pag. 291.
- 43) Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces etc. Journal de l'école polyt. 24. Cah. pag. 214.
- 44) Salmon, Analyt. Geometrie des Raums pag. XLI. Siehe auch Beltrami, Sulla teorica generale dei parametri differenziali. Bologna 1869.
- 45) Monge, Analyse etc. pag. 590. Conf. Note 41.
- 46) Minding, Journal von Crelle 19. Bd. pag. 160. Wie sich entscheiden lässt, ob zwei Flächen auf einander abwickelbar sind etc.
- 47) Bertrand. Monge, Analyse pag. 583.
- 48) Hamilton, Essay on the theory of Systems of Rays. Transactions of the Irish Academy. Vol. XVI. II. B. pag. 13.
- 49) Kummer, Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme. Journal von Crelle 57. Band pag. 189.
- 50) Du Bois-Reymond, Beiträge zur Interpretation der partiellen Differenzialgleichungen. Leipzig 1864 pag. 82.
- 51) Plücker, Neue Geometrie des Raumes. Leipzig 1869.
- 52) Minding, Über die Biegung gewisser Flächen. Crelle Bd. 18. Conf. Note 45.
- 53) Liouville in Monge, Analyse Note IV.
- 54) Weingarten, Journal v. Crelle Bd. 59. pag. 382 und Bd. 62. pag. 160.
- 55) Bour, Theorie de la déformation des Surfaces. Journal de l'école polyt. Tome 22.
- 56) Bonnet, Mémoire de la théorie des surfaces. Journal de l'école polyt. T. 25.
- 57) Codazzi, Abhandlungen 1860 zum Concurs eingesandt. Ebendaselbst.
- 58) Jellet, On the properties of the Inextensible Surfaces. Transactions of the Irish Academy. Vol. 22. Pars I. pag. 343.
- 59) Dini, 2. Band des Giornale di matematica.
- 60) Liouville Monge, Analyse.

- 61) Conf. Dini. Note sur les surfaces à courbure constante etc. Comptes rendus 1865 pag. 340. Enthält also nicht Neues.
- 62) Helmholtz, Populäre Vorträge III. Heft pag. 33.
- 63) Gauss, Briefwechsel mit Schuhmacher.
- 64) Lobatschewsky, Kasaner Boten 1829. Neue Anfangsgründe der Geometrie nebst einer vollständigen Theorie der Parallelen. Kasan 1836—1838. Geometrie imaginaire. Crelle's Journal Bd. 17. Theorie der Parallelen 1840. Die Pangeometrie. Kasan 1855.
- 65) Bolyai, Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae etc. Maros-Vasarhelyni 1832. Conf. Frischauf, Absolute Geometrie. Leipzig 1876.
- 66) Beltrami, Saggio di interpretazione della geometrica non-euclidea. VI. Band des „Giornale“.
- 67) Minding, Journal v. Crelle 20. Band pag. 325.
- 68) Klein, Mathem. Annalen. IV. Bd. pag. 623. Über die sogenannte Nichteukl. Geometrie.
- 69) v. Escherich, Die Geometrie auf den Flächen von constanter neg. Kr. Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Bd. 69. 1874. pag. 497.
- 70) Cayley, Sixth Memoir upon Quantics. Philosoph. Transactions Band 149.
- 71) Conf. Günther, Die Lehre von den Kugelfunctionen. Halle 1881 pag. 308.
- 72) Böklen, Analytische Geometrie des Raums. Stuttgart 1861 pag. 74. Über drei geometrische Transformationen. Grunerts Archiv 1858 pag. 92. Zur Theorie der geod. Linien Ibid. 1863 pag. 189.
- 73) Christoffel, allgemeine Theorie der geod. Dreiecke. Abhandlungen der Berliner Akademie, Math.-Physik. Klasse 1868 pag. 119.
- 74) Conf. Erdmann, die Axiome der Geometrie. Leipzig 1877.
- 75) Riemann, Gesammelte Werke. Leipzig 1876 pag. 254.
- 76) Conf. Lipschitz, Differenzialrechnung. I. B. pag. 223.
- 77) Beltrami, Théorie fondamentale des espaces de courbure constante. Traduit de l'italien par M. Houël. Annales de l'école normale VI. B. 1869 pag. 251. Annali di matematica II. Serie T. II. pag. 232.
- 78) Dirichlet, Eine Bemerkung von Lipschitz im 74. Band v. Crelle pag. 117. Über ein Problem der Variationsrechnung.
- 79) Schering, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
- 80) HELMHOLTZ, Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. 22 Mai 1866. (?). Heidelberger Jahrbücher 1868. pag. 733. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1868 II. B. pag. 193. Conf. Note 60.
- 81) KRONECKER, Monatsberichte der Berliner Akademie 1869 pag. 159. 688.
- 82) BEEZ, Über das Krümmungsmass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Mathemat. Annalen VII. Band pag. 387. Zeitschrift für Mathematik und Physik 20. Band pag. 423. 21. Bd. pag. 373. 24. Bd. pag. 1. 65.
- 83) CHRISTOFFEL, Journal von Crelle. 70 Bd. pag. 46. Über die Transformation der homogenen Differenzialausdrücke zweiter Ordnung pag. 241. Über die Transformation homogener Diff.-Ausdrücke zweiten Grades betreffender Theorien.
- 84) LIPSCHITZ, Journal v. Crelle 70. Bd. pag. 71. Untersuchung in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differenzialien. 71 Bd. pag. 274. 288. Entwicklung einiger Eigenschaften der quad-

ratischen Formen von n Differenzialien; 2 Mittheilungen. 72 Bd. pag. 1. Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differenzialien. Conf. Note 72. 78. Bd. Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen. 81. Bd. pag. 230. Beitrag zur Theorie der Krümmung. pag. 295. Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface.

85) Voss, Mathemat. Annalen 1880. 16. Bd. pag. 129.

86) Suworof, Sur les caractéristiques des systèmes de trois dimensions. Bulletin des sciences math. et astr. IV. Bd. pag. 180.

I. Kapitel.

Die Krümmung ebener Curven.

Die krummen Linien, deren Theorie bekanntlich einen grossen Theil der mathematischen Wissenschaft ausmacht, bildete immer eines der vorzüglichsten Objekte für die Spekulation der Geometer. Kaum war die Geometrie aus ihrer Kindheit herausgetreten, beschäftigte sie sich mit den Kegelschnitten; bald darauf sehen wir sie im Besitz der Kenntniss von den merkwürdigen Eigenschaften der Conchoide, der Cissoide, der Spiralen und anderer Curven, deren Namen und Theorien mit so manchen andern Denkmälern der alten Geometrie verloren gegangen sind. Aus den überlieferten Trümmern ersuchen wir recht deutlich, dass die alten Geometer den modernen an Geist und Erfindungsgabe kaum nachstehen; aber alles, was sie mit ihren mangelhaften Methoden über die krummen Linien gefunden haben, bildet doch immerhin nur eine Summe einzelner Sätze, welche keinen allgemeinen Gesetzen unterworfen und durch kein Band umschlungen sind, das geeignet gewesen wäre, leicht neue Entdeckungen entstehen zu lassen.

Durch das Studium der krummen Linien sind die Geometer schon sehr frühe auf die Begriffe der Richtung und der Tangente geführt worden. Die Tangente definirten sie als diejenige gerade Linie, welche der Curve der Art begegnet, dass durch den gemeinschaftlichen Punkt zwischen der Tangente und der Curve keine neue Gerade gezogen werden kann. Für jede bekannte Curve versuchten sie das Tangentenproblem in seinen verschiedenen Fassungen zu lösen; bei der Ausführung der geometrischen Constructionen war jedoch der Gebrauch keines andern Hilfsmittels als des Lineals und Zirkels gestattet, so dass es uns nicht wundern darf, wenn ihnen die Lösung nur in verhältnissmässig wenig Fällen gelungen ist. Nach der Einführung der Algebra in die Geometrie durch Descartes im 17. Jahrhundert konnte von der Tangente die

jetzt übliche schärfere Definition aufgestellt werden, und die Analysis gab nun Mittel und Wege an zur vollständigen Ausbildung der Tangentenmethode.

In diese Zeit fallen auch die ersten Versuche, nicht bloss die Richtung der Curve in ihren einzelnen Punkten ins Auge zu fassen, sondern auch die Richtungsveränderung oder die Krümmung der Curve zu bestimmen und zu messen. Angebahnt wurden die Untersuchungen auf dem angedeuteten Gebiet, das sich in der Folge als ebenso wichtig wie fruchtbar erwiesen hat, durch CHRISTIAN HUYGHENS, der den grössten Männern des siebenzehnten Jahrhunderts beizuzählen ist, gleich ausgezeichnet als tiefer Kenner der alten Geometrie wie als Förderer der Descartes'schen Methode. Sein mathematisches Genie leuchtet uns unstreitig am schönsten entgegen in der von ihm begründeten Theorie der Evolute ⁽¹⁾. Ist längs einer Curve ein Faden geschlungen, so wird bei dessen Abwicklung, wenn der Faden dabei gespannt bleibt, der Endpunkt vom Faden eine neue Curve erzeugen; die erstere heisst Huyghens die Evolute, die andere hingegen die „durch die Evolution beschriebene“, wofür wir heute kürzer Evolvente setzen. Die Betrachtung dieser beiden Linien führte ihn zur Aufgabe, zu jeder beliebig gestalteten Curve die Evolute zu construiren. Die Methode, deren er sich hiezu bedient, bietet noch gegenwärtig Interesse dar, weil sie derjenigen der späteren Differenzialrechnung schon sehr nahe kommt. An die gegebene Curve werden zwei einander unendlich nahe Normalen gezogen, welche die gesuchte Evolute berühren und sich in einem zwischen den beiden Berührungspunkten liegenden Punkte treffen müssen. Unter der Voraussetzung, dass man letztere drei Punkte als zusammenfallend betrachten dürfe, bestimmt dann Huyghens mittelst bekannter Doppelverhältnisse die Entfernung dieses Schnittpunktes vom Anfangspunkt der Normalen und so die Evolute selbst als den geometrischen Ort desselben. Die zahlreichen Anwendungen auf parabolische Curven zeigen jedoch aufs deutlichste das Schwerfällige, welches dieser Methode anhaftet, welcher ausserdem wie leicht ersichtlich, auch die nothwendige Allgemeinheit abgeht. Dass aber Huyghens umfassender Geist sich damit nicht begnügt, sondern wenigstens den tiefern Zusammenhang zwischen der Evolute und Evolvente mit den Krümmungsverhältnissen der Curven geahnt hat, tritt uns klar aus der Bemerkung entgegen, mit welcher er seine Lösung des Kettenlinienproblems begleitete ⁽²⁾. Durch den Scheitel jener damals so vielseitig discutirten Curve zeichnete er

den grössten Kreis, welcher ganz in die Curve hineinfällt und nannte dessen Halbmesser Krümmungsradius; das hiezugehörige Centrum bildete dann die Spitze der Curve, durch deren Evolution die Kettenlinie hervorgieng.

Lebhaft angeregt durch diese Huyghens'schen Arbeiten versuchte LEIBNITZ (1646—1716) vom rein geometrischen Standpunkt aus eine Theorie der Krümmung zu schaffen. In seiner ersten Abhandlung ⁽³⁾ über diesen Gegenstand gieng er von der Eigenschaft der Curven aus, dass die Richtung in jedem Punkt durch die Tangente angegeben werde und zog hieraus die Folgerung, dass man die Krümmung einer Curve in irgend einem Punkt durch eine einfachere Curve, welche dort nicht allein die nämliche Richtung, sondern auch dieselbe Krümmung besitze, messen könne; also durch eine Curve, welche die vorliegende nicht bloss berühre, sondern osculire. Leibnitz sagt nun weiter, wie die gerade Linie die geeignetste sei zur Bestimmung der Richtung, so eigne sich zum Messen der Krümmung am besten der Kreis, weil bei ihm die Krümmung überall die gleiche sei und er am leichtesten construiert werden könne. Die gegebene Curve werde in dem beliebig angenommenen Punkte von dem Kreis osculirt, welcher mit der Curve den kleinsten Berührungswinkel bilde, denn unter den ∞ vielen Kreisen, welche nach der concaven Seite berühren, lasse sich stets ein solcher finden, welcher dort der Curve am gleichartigsten sei und ihr gleichsam am längsten folge, mit andern Worten ihr so nahe komme, dass zwischen dem Kreis und der Curve kein anderer Kreisbogen, der die Curve im angenommenen Punkte trifft, beschrieben werden könne. Um den Berührungskreis zu finden, müsse man wissen, dass die gewöhnliche Berührung algebraisch durch eine Gleichung mit zwei gleichen Wurzeln, geometrisch durch zwei zusammenfallende Punkte bestimmt werde; die Berührung in einem Wendepunkt dagegen fordere eine Gleichung mit drei gleichen Wurzeln oder das Zusammenfliessen von ebensoviel Schnittpunkten; ganz analog finde man den Kreis oder eine beliebige andere Curve, welche die gegebene osculiren soll, durch vier gleiche Wurzeln oder durch zwei Berührungen, welche zusammenfallen. Leibnitz erwähnt an dieser Stelle sogar schon höherer Osculationen; wie er bei der Osculation ersten Grades zwei Punkte in einen einzigen vereinigt annahm, so glaubte er, dass bei der Osculation zweiten Grades vier Punkte, bei derjenigen vom dritten Grad sechs Punkte u. s. f. zusammenfliessen.

Der Irrthum, in welchen hier unser grosser Philosoph und Mathematiker gerathen war, konnte zu jener Zeit, die so reich an mathematischen Talenten ersten Ranges gewesen ist, nicht lange unbeachtet bleiben. Im Jahr 1692 erschien von JACOB BERNOUILLI, der sich um die Förderung des Leibnitz'schen Differenzialcalculus so ausserordentlich verdient gemacht hat, eine sehr schöne Abhandlung, in der nicht allein das Fehlerhafte in den von Leibnitz gezogenen Consequenzen klar und deutlich beleuchtet, sondern eine vollständige Theorie der Osculation gegeben wird ⁽⁴⁾. Die Osculation ersten Grades geht hervor aus dem Zusammenfallen von drei Schnittpunkten zwischen Kreis und Curve; diese höhere Art der Berührung ist demzufolge Berührung und Schneiden zugleich. Bei der Osculation vom zweiten Grad fliessen vier Schnittpunkte zusammen und damit hat man wieder eine eigentliche Berührung. Die Behauptung von Leibnitz in Bezug auf den Wendepunkt, dass letzterem drei gleiche Wurzeln entsprechen, erweist sich als richtig und zwar desshalb, weil an solchen Stellen der Osculationskreis in eine gerade Linie ausartet und der Krümmungsradius unendlich gross wird. Die Identität des geometrischen Ortes des Krümmungsmittelpunktes mit der Evolute resp. der Enveloppe der Normalen hatte schon Leibnitz erkannt. Nach dem Raisonement von Bernouilli geben nun die singulären Punkte der Evolute die Centra für etwaige Osculationen höherer Ordnungen. Für den Krümmungshalbmesser leitete er die Formel ab

$$\rho = \frac{ydy + qx \sqrt{y^2 + q^2}}{y dq - q dy}$$

wenn q die Grösse der Subtangente im Curvenpunkte (xy) repräsentirt ⁽⁵⁾. Sehr umständliche Rechnungen führen ihn später ⁽⁶⁾ auf die neue Formel

$$\rho = \frac{dx ds}{d^2 y} = \frac{dy ds}{d^2 x},$$

aus welcher unter richtiger Berücksichtigung der Vorzeichen leicht die jetzt gebräuchliche

$$\rho = \frac{ds^3}{dx d^2 y - d^2 x dy}$$

gewonnen werden kann.

Merkwürdiger Weise vermochten diese klaren Schlüsse Bernouillis nicht, Leibnitz vollständig eines Besseren zu belehren ⁽⁷⁾. Dieser hält im Gegentheil anfänglich noch daran fest, dass die gewöhnliche Osculation durch das Zusammenfallen von zwei Berührungen, also von vier Punkten hervorgerufen werde und bloss im Grenzfall, wenn nemlich ein Wendepunkt vorliege, beschränke sich die sozusagen entstehende oder vergehende Osculation auf drei Schnittpunkte. Ebenso verhalte es sich bei den Osculationen höherer Ordnungen. Die Gründe, welche Leibnitz hiefür geltend macht, entspringen einer falschen Vorstellung über das gleichzeitige Zusammenfallen der Schnittpunkte, welche der Kreis mit der Curve erzeugt. In äusserst liebenswürdiger Form widerruft dann Leibnitz fünf Jahre später ⁽⁸⁾, nachdem er, wie er selbst sagt, genauer über diese schwierigen Dinge nachgedacht habe, seine obigen Ansichten und bekennt seine volle Uebereinstimmung mit allem, was Jacob Bernouilli in Bezug auf die Anzahl der Wurzeln behauptet hat. Dieser Ueberzeugung verleiht er auch noch mehrfach Ausdruck an verschiedenen Stellen des regen Briefwechsels, den er viele Jahre hindurch mit Johann Bernouilli, dem jüngern Bruder von Jacob Bernouilli, unterhalten hat ⁽⁹⁾.

Wahrscheinlich schon vor Leibnitz hat NEWTON (1643—1727) die Lehre von der Krümmung ausgebildet; seine Untersuchungen über die Centripetalkraft ⁽¹⁰⁾ mussten ihn mit logischer Nothwendigkeit auf den Krümmungskreis führen, dessen Eigenschaften er jeden Falls vollzählig gekannt hat. Die Art und Weise, wie Newton das Problem, den Krümmungsradius behandelte und für denselben in der That einen richtigen Ausdruck fand, erregt in hohem Grade unsere Bewunderung. Seine Fluxionsmethode ⁽¹¹⁾ reichte nicht aus wegen der Unkenntniss der zweiten Ableitungen, desshalb wiederholte er die Operation des Differenziiren nochmals und nahm, um den zweiten Differenzialquotienten zu umgehen, einen Kunstgriff zu Hilfe, welcher seinen mathematischen Scharfsinn im hellsten Lichte zeigte. Ausserdem versuchte Newton, die Qualität oder Variation der Krümmung in den verschiedenen Punkten einer Curve zu bestimmen ⁽¹²⁾; er definirte sie als das Verhältniss der Fluxion des Krümmungsradius zur Fluxion der Curve selbst; auf die bekannten Beispiele angewendet, stellte sich das Resultat heraus, dass diese Variation bei der Parabel dem einfachsten Gesetz unterworfen ist und dass sich also vom Kreis abgesehen, die Parabel am besten zur Bestimmung der Krümmung eignet.

Werfen wir nun einen Blick auf den damaligen Stand der analytischen Geometrie am Anfang des 18. Jahrhunderts, so erscheint sie uns in der fruchtbarsten Entwicklung begriffen. Theils rein nach der Descartes'schen Methode, theils mit Benützung der aus ihr hervorgegangenen Infinitesimalrechnung wurden die Haupteigenschaften der Kegelschnitte, die höheren Curven und krummen Oberflächen von ausgezeichneten Mathematikern in erschöpfender Weise hergeleitet; unter den letzteren führen wir nur auf Leonhard Euler (1707—1783), Jean Paul de Gua (1712—1785) und den Genfer Gabriel Cramer (1704—1752) ⁽¹³⁾. Dieser zuletzt erwähnte Geometer hat insbesondere seine Untersuchungen auch auf die Krümmungsverhältnisse der höheren Curven ausgedehnt. In seinem Werke: *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* setzt er auseinander, dass alle Parabeln von der Gleichung $y = ax^h$ im Scheitel eine unendlich kleine, oder endliche oder unendlich grosse Krümmung besitzen, je nachdem $h \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 2$ angenommen wird. Lässt man bei constantem Exponenten h den Parameter a variiren, so entsteht eine unendliche Reihe von neuen Parabeln, deren Krümmung im Scheitel nach allen denkbaren Verhältnissen mitvariirt, der Uebergang zu einem höhern Exponenten erzeugt eine neue Serie von Parabeln, von denen die gekrümmteste doch unendlich mal weniger gekrümmt erscheint, als diejenige der vorigen Reihe, welche die kleinste Krümmung gehabt hat. Es variiren also alle Krümmungen der Parabeln ohne Ausnahme unter sich durch ∞ viele Stufen hindurch und man gelangt zu einer genauern und vollständign Idee der Krümmung, wenn der betreffende Punkt einer Curve, für welche die Krümmung zu bestimmen ist, als Spitze jener Parabel gewählt wird, welche sich gleichsam mit der Curve identificirt. Zur Berechnung der osculirenden Parabel verlegt Cramer den Coordinatenanfang in einen Curvenpunkt, welcher dem zu betrachtenden unendlich nahe liegt, so dass dessen Coordinaten unendlich kleine Grössen vorstellen. Hierauf entwickelt er den Werth der Ordinate y dieses Punktes in einer nach steigenden Potenzen der Abscisse x fortschreitenden Reihe $y = Ax^h + Bxi + Cxk + \dots$.

Für den Fall $h = 1$ verleiht die Gerade $y = hx$ Aufschluss über die Richtung der Curve, während $y = Ax + Bxi$ die Gleichung der osculirenden Parabel repräsentirt, weil alle höhern Potenzen von x zum Wegfall kommen; weicht dagegen h von der Einheit ab, so wird die osculirende Parabel durch $y = ax^h$ angegeben u. s. f.

Alle die seither angeführten Methoden zur Bestimmung der Krümmung lassen in Bezug auf Allgemeinheit und Einfachheit wenig zu wünschen übrig; doch ungern vermisst man bei ihnen die Evidenz und Schärfe der Beweise der alten Geometer. Diese Vorzüge finden wir hergestellt in den Principien, nach denen der grosse Analytiker LAGRANGE (1736—1813) das Problem der Krümmung behandelt hat ⁽¹⁴⁾. Unabhängig von der Theorie des Unendlichkleinen entwickelte er nur auf dem Wege der rein algebraischen Analysis die Sätze der Differenzial- und Integralrechnung und schaffte sich (1796) so eine Theorie der analytischen Funktionen, welche durch die Klarheit und Eleganz der Darstellung, die Schärfe der Deduction und consequenten Systematik für alle Zeiten die Bewunderung der Mathematiker erregen wird. Diese Funktionentheorie ermöglicht es Lagrange, alle Berührungerscheinungen in grösster Allgemeinheit darzustellen. Besitzen zwei Curven einen gemeinschaftlichen Punkt und erweisen sich ausserdem die ersten oder die beiden ersten oder die drei ersten Ableitungen etc. ihrer Gleichungen für die Coordinaten dieses Punktes als identisch, so stellt sich die Unmöglichkeit heraus, durch den Punkt zwischen den zwei Curven eine andere zu ziehen, wofern ihre gleich hohen Ableitungen für den betreffenden Punkt den ersteren nicht gleichwerthig sind; mit andern Worten: Sind in einem gemeinsamen Punkt zweier Curven die I, II u. s. w. Ableitungen übereinstimmend, so coincidiren diese Curven nur in diesem Punkte allein und nicht auch in andern benachbarten Punkten; die Gleichheit der Ableitungen bewirkt nur, dass sich die Curven so nahe kommen, dass keine andere Curve, für welche diese Gleichheit nicht ebenfalls zutrifft, zwischen ihnen hindurch gehen kann. Auf diese Weise entstehen die feinen Unterschiede in der Annäherung der Curven, welche man Berührung, Osculation u. s. w. genannt hat und die nach der gewöhnlichen Art der Auffassung der Infinitesimalrechnung seither als mehr oder weniger ausgedehnte Coincidenzen aufgefasst worden sind. Heisst die Annäherung zweier Curven ein Contact m ter Ordnung, wenn die m ersten Ableitungen dieselben sind, so bestimmen sich die $m + 1$ constanten Grössen, welche die Gleichung $F(x_1, y) = 0$ einer der Natur nach gegebenen Curve enthalten muss, die mit einer gegebenen Curve $f(xy) = 0$ einen Contact m ter Ordnung im Punkt (xy) haben soll, aus den folgenden $m + 1$ Gleichungen:

$$F(x, y) = 0 \quad F'(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad F^{(m)}(x, y) = 0$$

So können z. B. die Constanten in den Gleichungen osculirender Kreise,

Parabeln etc. gefunden werden. Will man dagegen die einfachste Curve $F(x, y) = 0$, welche mit der vorliegenden Curve $f(x, y) = 0$ einen Contact m ter Ordnung im Punkte (a, b) besitzen soll, so setzt man

$$y = b + (x - a) b' + \frac{(x - a)^2}{2!} b'' + \frac{(x - a)^3}{3!} b''' + \dots$$

und nimmt rechter Hand soviele Glieder als in der Zahl $m + 1$ Einheiten vorkommen; auf diese Art erhält man dann in aller Schärfe die osculirende Parabel beliebig hohen Grades, die dazu dienen kann, uns über die Eigenschaften der betrachteten Curve in dem Punkt (a, b) zu belehren. — Wegen des Zusammenhangs der Berührungsgrade der Curven mit ihren Differenzialgleichungen muss auf die Originalabhandlungen selbst verwiesen werden. Zum Schluss dieses Kapitels möge nur noch bemerkt werden, dass die Formeln für den Krümmungsradius in Polarcoordinaten von Le Barbier (1831) stammen ⁽¹⁵⁾ und später von Grunert ⁽¹⁶⁾ verallgemeinert worden sind.

II. Kapitel.

Die Krümmung der Raumcurven.

Die analytische Theorie der doppelt gekrümmten Curven verdanken wir dem geistreichen Franzosen Clairaut ⁽¹⁷⁾, denn alles vor ihm zu Tag Geförderte beschränkte sich auf wenige spezielle Fälle. Erst 16 Jahre alt veröffentlichte er im Jahre 1731 ohne Nennung seines Namens seine *Recherches sur les courbes á double courbure*, ein Werk, das auch Untersuchungen krummer Flächen mittelst ihrer Darstellung durch Gleichungen enthalten soll. Wir beschränken uns hier darauf, dasselbe angeführt zu haben, denn in Deutschland dürfte das seltene Buch wohl sehr schwer zu finden sein. — Die auf die Krümmung bezüglichen Eigenschaften der Raumcurven haben zuerst von MONGE eine tiefere Bearbeitung erfahren. Im Jahr 1771 präsentierte dieser grosse Geometer der französischen Akademie eine äusserst lehrreiche Abhandlung über die Evoluten, Krümmungskreise und Wendepunkte derartiger Linien ⁽¹⁸⁾. Aus dem reichen Inhalt mögen nur folgende Theoreme Erwähnung finden:

Legt man durch die Endpunkte A und B eines unendlich kleinen Ele-

ments AB einer doppelt gekrümmten Curve die beiden Normalebenen, so schneiden sich diese nach einer Geraden OP , von welcher man jeden Punkt als Mittelpunkt oder Pol des unendlich kleinen Curvenelements AB betrachten darf; dies von A und B auf OP gefällten Lothe treffen sich in einem Punkt G dieser Geraden. Will man nun die Krümmung im Punkt A bestimmen, so geschieht dies durch die Angabe der Länge des Halbmessers AG und der Lage des Mittelpunktes G vom Osculationskreis, welcher zum Punkte A gehört. Die Wiederholung der angedeuteten Construction für alle folgenden Curvenpunkte liefert eine unendlich grosse Anzahl von Geraden als Schnittlinien von je 2 unmittelbar auf einanderfolgenden Normalebenen und ihr geometrischer Ort bildet, wie leicht ersichtlich ist, eine abwickelbare Oberfläche. Monge zeigt nun weiter, dass zu jeder einfach oder doppelt gekrümmten Curve eine ganze Schaar von Evoluten gehört, welche alle, nur eine einzige ausgenommen, selbst doppelt gekrümmt sind und sämmtliche liegen auf der soeben hergestellten abwickelbaren Fläche. Um irgend eine solche Evolute zu construiren, braucht man nur aus einem beliebig gewählten Punkte der gegebenen Curve an die Fläche eine Tangente zu legen und diese in ihrer Fortsetzung vom Berührungspunkte an längs eines gespannten Fadens fortzusetzen; jede Evolute stellt daher eine kürzeste Linie der Polarfläche dar. — Construirt man zu jedem Punkt A der vorgelegten Raumcurve das Krümmungscentrum G mittelst des auf die Charakteristik OP gefällten Lothes AG , so erfüllen die Centra G eine neue Curve, welche jedoch keine Evolute der gegebenen Curve vorstellen kann, wofern letztere nicht eine ebene Curve ist; trifft dies zu, so repräsentirt sie jene einzige Evolute, welche die Geometer vor Monge beschäftigt hatte. — Ferner beweist Monge, dass drei auf einander folgende Elemente der Raumcurve stets gleich weit von einem bestimmten Punkte der Rückkehrkante der abwickelbaren Polarfläche abstehen; dieser Punkt selbst ergibt sich als Schnitt von drei unendlich nahen Normalebenen. Es lassen sich demnach diese drei Elemente der Raumcurve als auf der Oberfläche einer Kugel befindlich betrachten, deren Centrum in den soeben fixirten Punkt der Rückkehrkante hinein fällt; die Rückkehrkante erscheint als der geometrische Ort der Centra der sphärischen Krümmung der gegebenen Raumcurve, ohne dass sie eine Evolute der letzteren ist.

Für all' die seither aufgeführten Stücke leitet Monge aus den zwei

Gleichungen der Raumcurve, durch welche sie auf ein dreiaxiges Coordinatensystem bezogen wird, die analytischen Ausdrücke ab, welche wir hier nicht reproduciren wollen. — Bei den Raumcurven sind, wie wir eben gesehen haben, zweierlei Arten von Krümmungen ins Auge zu fassen, nemlich die gewöhnliche zwischen zwei und die sphärische zwischen drei zusammenstossenden Elementen. Aus diesem Grunde können auf einer Raumcurve auch zweierlei verschiedene Inflexionen auftreten, je nachdem zwei Elemente in die gleiche Richtung fallen oder drei Elemente einer Ebene angehören; darnach unterscheidet Monge zwischen doppelter und einfacher Inflexion. Zu einem Inflexionspunkt der ersten Art gehört ein Mittelpunkt sphärischer Krümmung, der im Unendlichen liegt; ein Inflexionspunkt der zweiten Art verlangt einen Krümmungsradius, dessen Werth entweder gleich null oder gleich unendlich ist, womit zugleich die Wege zur Berechnung solcher Punkte genügend angedeutet sind.

Ein Zeitgenosse von Monge, TINSEAU hat sich gleichfalls mit der Untersuchung der Raumcurven abgegeben ⁽¹⁹⁾; von ihm ist der Begriff der Osculationsebene in die Geometrie eingeführt worden. Damit bezeichnete er die Ebene, welche zwei an einander grenzende Curvenelemente bestimmen, also jene Ebene, welche man gegenwärtig mit Vorliebe Schmiegungeebene nennt, wie ja auch die Kugel durch drei Elemente als Schmiegungekugel bezeichnet wird.

Von wesentlich anderem Standpunkte aus ist die Theorie doppelt gekrümmter Curven von LAGRANGE beleuchtet worden ⁽¹⁴⁾. Er bezieht zwei solche Curven durch ihre Gleichungen $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ resp. $y = F(x)$ und $z = \Phi(x)$ auf ein dreiaxiges Coordinatensystem; beide Curven besitzen einen gemeinschaftlichen Punkt (ξ, η, ζ) , falls

$$f(\xi) = F(\xi) \text{ u. } \varphi(\xi) = \Phi(\xi)$$

Ist ausserdem noch $f'(\xi) = F'(\xi)$ und $\varphi'(\xi) = \Phi'(\xi)$, so gelingt es nicht, zwischen den zwei Curven durch den gemeinsamen Punkt eine dritte zu legen, welche nicht den eben angeschriebenen Bedingungen genügt. Ganz ebenso verhält es sich, wenn die weiteren Gleichungen $\varphi''(\xi) = F''(\xi)$ und $\varphi'''(\xi) = \Phi'''(\xi)$ befriedigt werden u. s. f. Das erste Paar von Gleichungen bestimmt einen Contact erster Ordnung, das folgende Paar einen solchen der zweiten Ordnung u. s. f. Sind $f(x, y, z) = 0$ und $\varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichungen einer vorliegenden Raumcurve, mit welcher eine der Natur nach gegebene Curve $F(x, y, z) = 0$;

$\Phi(xyz) = 0$ im Punkt $(\xi\eta\zeta)$ einen Contact erster Ordnung besitzen soll, so folgen dafür die vier Gleichungen:

$$F(\xi\eta\zeta) = 0; \quad \Phi(\xi\eta\zeta) = 0; \quad F'(\xi\eta\zeta) = 0 \text{ u. } \Phi'(\xi\eta\zeta) = 0;$$

für einen Contact II. Ordnung treten die beiden weiteren hinzu:

$$F''(\xi\eta\zeta) = 0 \text{ u. } \Phi''(\xi\eta\zeta) = 0. \text{ u. s. f.}$$

Diesen Gleichungen wird man Genüge leisten mittelst der willkürlichen Constanten a, b, c ; welche in die gegebenen Funktionen $F(xyz)$ und $\Phi(xyz)$ eintreten. Auf diese Weise gewinnt z. B. Lagrange die Formeln für den Osculationskreis. Dabei bedient er sich zur Herstellung des erforderlichen Kreises im Raum einer Kugel und einer durch deren Centrum gehenden Ebene. — Endlich forscht Lagrange nach den Bedingungen, welche erfüllt werden müssen, dass der geometrische Ort der Krümmungscentra zur Evolute der gewundenen Curve werde und bespricht trotz der oben erwähnten ganz richtigen Angabe Monge's die Möglichkeit, dass dieser Fall auch bei Raumcurven stattfinden könne, eine Ansicht, deren absolute Haltlosigkeit später von Jacobi aufs schärfste dargelegt worden ist ⁽²⁰⁾.

Bekanntlich gibt in ebenen Curven der Grenzwert, dem sich das Verhältniss eines Curvenelementes ds zum Winkel $d\alpha$ der zwei Normalen in den Endpunkten nähert, die Grösse des Krümmungsradius an, während der reciproke Werth die Krümmung des Curvenelementes ausdrückt. Analog nannte nun Fourier (1805?) ⁽²¹⁾ bei Raumcurven das Verhältniss zweier unendlich naher Normalebenen zum dazwischen liegenden Bogen die erste Krümmung und als die zweite Krümmung bezeichnete er das Verhältniss, in welchem der Torsionswinkel, d. h. der Winkel, welchen zwei unendlich nahe Osculationsebenen einschliessen, zum dazugehörigen Curvenelemente steht. Die Osculationsebenen einer Raumcurve erzeugen eine abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkante mit der gegebenen Raumcurve zusammenfällt. Bei der Ausbreitung dieser osculirenden Fläche in eine Ebene erleidet die erste Krümmung keine Änderung; dabei wird die Raumcurve in eine ebene Curve transformirt, deren Krümmung mit der ersten Krümmung der gegebenen übereinstimmt. Die Schnittlinien der Normalebenen sind die Charakteristiken einer andern developpablen Fläche mit einer Rückkehrkante, deren erste Krümmung gleich der zweiten der gegebenen

Raumcurve ist; die Abwicklung der letzten Fläche liefert demnach eine ebene Curve, deren Krümmung identisch ist mit der zweiten Krümmung der Raumcurve.

Die analytischen Ausdrücke für die so eben definirten neuen Grössen sind (1802) von *Lancet* aufgestellt worden ⁽²²⁾. Von ihm stammt auch die Construction der rectificirenden Fläche, der Enveloppe derjenigen Ebenen, die durch jeden Curvenpunkt normal zum Radius des Osculationskreises gelegt sind. Bei ihrer Abwicklung verschwinden beide Krümmungen und die Raumcurve selbst geht in eine gerade Linie über.

Jede Raumcurve, deren beide Krümmungen constant sind, kann nur eine Schraubenlinie sein, welche sich auf einem geraden Kreiskegel hinzieht; es ist dieser Satz von *Liouville* ⁽²³⁾ auf geometrischem Weg abgeleitet und von *Puiseux* analytisch bewiesen worden. Geometrische Betrachtungen haben ferner *Bertrand* zu dem noch viel allgemeineren und sehr bemerkenswerthen Satze geführt, dass unsere Schraubenlinie überhaupt die einzige Curve repräsentirt, für welche zwischen den Radien der Krümmung und Torsion ein constantes Verhältniss herrscht. Der analytische Beweis hiefür ist von *Serret* entdeckt worden.

Wie seither zur Bestimmung der Krümmung ebener Curven der gleichmässig gekrümmte Kreis benützt worden ist, wählte *Olivier* ⁽²⁴⁾ die Schraubenlinie von constanter Krümmung und constanter Torsion, um gleichzeitig beide Krümmungen einer Raumcurve darzustellen. Nach *Olivier* lässt sich stets eine solche Schraubenlinie construiren, welche in einem beliebig gewählten Punkt einer vorliegenden Raumcurve denselben Contingenz- und denselben Torsionswinkel besitzt wie die Raumcurve selbst; der Contact zwischen beiden Curven ist jedoch bloss von der zweiten und nicht, wie man leicht glauben möchte, von einer höhern Ordnung. Endlich bleibt noch zu erwähnen, dass ⁽²⁵⁾ *Hamilton* über Raumcurven dritter Ordnung, welche durch sechs aufeinanderfolgende Punkte einer gegebenen Raumcurve gehen, Untersuchungen angestellt hat, die jedoch nicht weiter erörtert werden sollen.

Für Curven, welche auf krummen Oberflächen verzeichnet sind, lassen sich die Abweichungen von ihren geodätischen Tangenten in ganz analoger Weise behandeln, wie dies für ebene Curven in Bezug auf ihre Tangenten geschehen ist. Die Theorie einer solchen relativen Krümmung hat *Liouville* ⁽²³⁾ begründet. Nach ihm ist die geodätische Krümmung einer Curve einer krummen Fläche in

einem ausgewählten Punkt der Grenzwert des Verhältnisses zwischen dem Winkel, den die geodätischen Tangenten in den Endpunkten des anstossenden Curvenelements bilden, und der Grösse dieses Elements. Der reciproke Werth davon führt die Bezeichnung des Radius der geodätischen Krümmung. Letzterer stimmt überein mit dem Radius der absoluten Krümmung jener ebenen Curve, in welche sich die gegebene transformirt, wenn man längs derselben der Fläche eine abwickelbare Fläche umbeschreibt und diese in eine Ebene ausbreitet. Auch die analytischen Formeln für die geodätische Krümmung finden wir von Liouville in eleganter Weise hergeleitet.

III. Kapitel.

Die Krümmung der Flächen.

Nachdem es den Geometern mit vieler Mühe gelungen war, mittelst der Osculation die Krümmung der Curven der Berechnung zugänglich zu machen, erhob sich die neue Frage, ob nicht auch die Krümmung der Flächen in ähnlicher Weise bestimmt werden könnte. Geben die vorausgehenden Zeilen schon Zeugniß von den bedeutenden Schwierigkeiten, mit denen das Problem für die Curven verknüpft war, so schienen nun die Hindernisse, welche sich der Lösung für die Flächen entgegenstellten, fast unüberwindlicher Natur zu sein und wir werden sehen, dass es des Scharfsinns und Abstraktionsvermögens der bedeutendsten Mathematiker bedurfte, um Schritt für Schritt Bahn zu brechen nach dem Ziel, das so nah zu liegen scheint und dennoch ein halbes Jahrhundert hindurch nicht völlig erreicht werden konnte.

Die ersten Versuche, Licht über die Krümmung der Flächen zu verbreiten, verdanken wir Euler ⁽²⁶⁾, dem Begründer der analytischen Raumgeometrie. Euler meinte, dass die Frage der Krümmung der Flächen gar keiner absoluten Beantwortung fähig sei; von den Kugeln allein, sagte er, lassen sich die Krümmungen unter der Voraussetzung bestimmen, dass die Krümmung einer Kugel überhaupt mit der eines Grosskreises übereinstimmig sei und der gemeinsame Radius als das richtige Mass für die Krümmung betrachtet werden könne; für jede andere Fläche kann die Krümmung nach Euler nicht mit der

einer Kugel verglichen werden, denn in jedem einzelnen Flächenpunkt können unzählig viele verschiedene Krümmungen auftreten, die möglicher Weise sogar nach einer Richtung hin concav, nach der andern convex sind wie bei einem Sattel. Zur Bildung einer richtigen Vorstellung von der Krümmung in einem bestimmten Punkt einer krummen Oberfläche ist die Kenntniss der Krümmung nach jeder der unendlich vielen Richtungen erforderlich, die sich durch diesen Punkt legen lassen. Aber durch den letztern gehen nicht allein unendlich viele Schnitte in Bezug auf alle Richtungen auf der Fläche, sondern auch in Bezug auf ihre verschiedenen Neigungen gegen die letztere; für den vorliegenden Zweck, sagte Euler, genüge es, nur die unendliche Anzahl von Schnitten zu betrachten, welche auf der Fläche normal sind; für jeden Normalschnitt sei die Krümmung zu bestimmen und die Gesammtheit aller dieser Krümmungsradien bilde das wahre Krümmungsmass der Fläche in dem ausgewählten Punkte.

Durch eine recht deutliche, aber äusserst weitläufige Methode gewinnt Euler den allgemeinen Ausdruck für den Krümmungsradius eines beliebigen Schnittes und insbesondere eines Normalschnittes; dann wählt er die Tangentialebene zur Coordinatenebene xy und die dazu gehörige Normale durch den Berührungspunkt zur dritten Axe des orthogonalen Systems. Jeder Normalschnitt, dessen Ebene mit der Axe der x einen mit φ bezeichneten Winkel macht, besitzt einen Krümmungsradius

$$\rho = \frac{1}{L + M \cos 2\varphi + N \sin. 2\varphi},$$

worin L , M u. N Functionen der Coordinaten des Berührungspunktes vorstellen. Die letztere Formel enthält nach Euler die Natur der Krümmung. Zwei Elementen derselben Fläche oder verschiedener Flächen kommt eine gleich starke Krümmung zu, wenn beiderseits die drei Functionen L resp. M und N gleichwerthig sind oder durch passende Coordinatentransformationen gleichwerthig gemacht werden können. Ferner lassen sich dieselben durch drei beliebige Normalschnitte bestimmen, wesshalb diese zur Berechnung aller übrigen hinreichen⁽²⁴⁾; wenn demnach zwei Flächenelemente in Bezug auf drei Osculationsradien, welche solchen Schnitten entsprechen, die unter sich beiderseits gleich geneigt sind, sich gleich verhalten, so haben sie auch die nämliche Krümmung. Die An-

wendung der Regel für Maxima und Minima führt dann Euler auf den Satz von sehr grosser Wichtigkeit, dass in jedem Flächenelement die zwei Normal-ebenen, von denen die eine die grösste, die andere die kleinste Krümmung enthält, immer auf einander senkrecht stehen; werden nun deren zwei Schnittlinien mit der Tangentialebene zu neuen Coordinatenaxen gewählt, so hat ein anderer Normalschnitt, welcher mit einem dieser beiden Hauptschnitte den Winkel φ bildet, einen Krümmungsradius

$$\rho = \frac{1}{L+M \cos 2\varphi} = \frac{2fg}{f+g-(f-g) \cos 2\varphi},$$

wenn f = dem grössten und g = dem kleinsten Krümmungsradius genommen wird. Aus diesem Theorem zieht nun Euler die Folgerung, dass zur Bestimmung des wahren Krümmungsmasses einer Fläche die Kenntniss des grössten und kleinsten Krümmungsradius genüge, da durch diese sich sämtliche andere vollständig berechnen lassen.

Dieses schöne Eulersche Gesetz, welches sich auf alle Flächen ohne Ausnahme erstreckt, erwies sich für die ganze Theorie der Krümmung von ganz fundamentaler Bedeutung und grosser Tragweite. Doch muss betont werden, dass sich dasselbe eigentlich nur auf die Vertheilung der Krümmung in den Normalschnitten bezog, denn Eulers Annahme, dass die schiefen Schnitte bei der Beurtheilung der Krümmung ohne Weiteres ausser Acht gelassen werden dürfen, war für ihn eine ungerechtfertigte Voraussetzung, auf welche wir später noch einmal zurückkommen werden. Auch war mit der Kenntniss des Gesetzes der Vertheilung der Krümmung um einen Flächenpunkt das Problem, für die Krümmung der Fläche selbst ein Mass aufzustellen, keineswegs gelöst. Dieses Ziel verfolgte Meusnier ⁽²⁸⁾, (der als Zögling der polytechnischen Schule zu Paris gestorben sein soll ⁽³²⁾). Er liess sich bei seinen Untersuchungen von ganz anderen Prinzipien leiten als Euler. Die Krümmung einer Curve, sagt Meusnier, verdankt ihre Entstehung der fortwährenden Änderung der Tangentenrichtung und ihre Grösse wird von dem Winkel gemessen, den zwei unendlich nahe Tangenten einschliessen. Der Ausdruck für einen solchen Contingenzwinkel, der die ganze Theorie der Krümmung enthält, hängt nur ab von den Differenzialgleichungen erster und zweiter Ordnung des in Betracht kommenden Linienelements; woraus geschlossen werden kann, dass eine weitere

Curve, welche dieses Element berührt und im Berührungspunkt die nemliche Differenzialgleichung zweiter Ordnung besitzt, auch die nämliche Krümmung hat. Aber letztere Eigenschaften kommen immer einem bestimmten Kreis zu; jedes beliebige Linienelement kann also als Theilchen eines solchen Kreises angesehen werden. Ebenso, meint Meusnier, verhalte es sich bei der Krümmung der Flächen. Nach seiner Anschauung hat diese ihren Grund in dem Variiren der Tangentialebene von einem Punkt zum andern. Desshalb hänge die Krümmung eines Flächenelements nothwendig von der Formel ab, welche die Änderung der Tangentialebene in der gesammten Ausdehnung der Fläche angibt. Die Berechnung des Winkels zweier unendlich naher Berührungsebenen ergebe aber, dass derselbe nur von den Differenzialgleichungen erster und zweiter Ordnung des betrachteten Flächenelements abhängig sei; es müsse also eine zweite Fläche, die das Flächenelement berührt und im Berührungspunkt die gleiche Differenzialgleichung zweiter Ordnung hat, auch ebenso stark gekrümmt sein. Für das Flächenelement findet Meusnier die Gleichung

$$A) \quad d^2z = cdx^2 + 2edxdy + fdy^2,$$

wobei die xy Ebene in die Berührungsebene des gegebenen Flächenpunktes und die z Axe in die Richtung von dessen Normalen fällt. Die Coefficienten c , e und f repräsentiren Funktionen der Coordinaten und charakterisiren die Fläche. Der Tangentialebene im benachbarten Punkt (dx, dy, dz) entspricht die Gleichung

$$z = x(cdx + edy) + y(edx + fdy);$$

sie bildet mit der Tangentialebene im Coordinatenanfang den sehr kleinen Winkel

$$\epsilon = \sqrt{(cdx + edy)^2 + (edx + fdy)^2},$$

der, wie oben behauptet worden ist, nur von den Grössen c , e und f d. h. von der Differenzialgleichung A abhängt. Wenn es nun gelingt, eine andere berührende Fläche aufzustellen, deren Differenzialgleichung mit A identisch ist, so gehört zu ihr der nemliche Werth ϵ ; mit andern Worten, sie hat die gleiche Krümmung. Allen diesen Anforderungen leistet nun die Fläche Genüge, deren Gleichung

$$B) \quad z^2 = cx^2 + 2exy + fy^2$$

ist; zur Verification braucht man nemlich nur zweimal zu differenziiren. Das gegebene Flächenelement kann somit als in der Fläche B liegend angesehen werden. Letztere erweist sich ferner als symmetrisch gegen zwei rechtwinklige Gerade der Tangentialebene, welche bis jetzt die xy Ebene gebildet hat. Wird das Coordinatensystem um die z Axe gedreht, bis die Axen der x und y mit den vorigen Symmetriexen coincidiren, so reducirt sich die Differenzialgleichung A in

$$C) d^2z = \alpha dx^2 + \beta dy^2$$

Daran reiht Meusnier den schönen Satz, dass jedes beliebige Flächenelement als durch die Rotation eines unendlich kleinen Kreisbogens um eine der Tangentialebene parallele Axe erzeugt betrachtet werden darf; diese Rotationsfläche wird erhalten, wenn in der Normalebene durch den Berührungspunkt und einer der Symmetralaxen eine Gerade parallel zu letzterer in einem Abstand ρ gezogen und mit einem Radius r in derselben Normalebene ein Kreisbogen construirt wird, der die Tangentialebene berührt. Die neue Gerade gibt die Rotationsaxe, der Kreisbogen den die Fläche beschreibenden Meridian. Die Werthe von r und ρ lassen dann eine solche Bestimmung zu, dass die Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$d^2z = \frac{dx^2}{r} + \frac{dy^2}{\rho} \quad . \quad . \quad .$$

der Rotationsfläche mit der Gleichung C identisch wird und diese fraglichen Werthe sind:

$$r = \frac{2}{c+f+\sqrt{(c-f)^2+4e^2}} \quad \text{u.} \quad \rho = \frac{2}{c+f-\sqrt{(c-f)^2+4e^2}}$$

Als eine zweite Erzeugungsart unseres Flächenelements bietet sich die folgende: In der Normalebene durch die andere bisher nicht benützte Symmetrieaxe wird parallel zur letzteren im Abstand r eine Gerade als Rotationsaxe gezogen und mit dem Radius ρ ein die Fläche berührender Bogen construirt, der Meridian der rotirenden Fläche. Dadurch wird nun nach Meusnier die Frage der Krümmung sehr einfach, denn sie reducire sich auf die Bestimmung der Grössen r und ρ , den Krümmungsradien der Fläche, von denen die Krümmung allein abhängig sei.

Die Lage einer beliebigen Ebene durch den Berührungspunkt ist bekannt durch die Angabe ihres Neigungswinkels ν gegen die Tangentialebene und des Azimuth α der Schnittlinie gegen die erste Symmetrieaxe. Zu der in dieser Ebene liegenden Schnittcurve gehört ein Krümmungsradius

$$R = \frac{2r\rho \sin \nu}{r + \rho(r - \rho) \cos 2\alpha}$$

Für die Normalschnitte ist $\nu = 90^\circ$; für sie gilt somit die Formel

$$R = \frac{2r\rho}{r + \rho - (r - \rho) \cos 2\alpha};$$

aus diesem Ausdruck ist unmittelbar zu entnehmen, dass die Krümmungsradien r und ρ den Maximal- und Minimalwerthen entsprechen, welche für R auftreten können; d. h. r und ρ erweisen sich identisch mit den Eulerschen Hauptkrümmungsradien. Ferner fließt aus der allgemeinen Formel für R , dadurch dass man α einen bestimmten constanten Werth beilegt, der sehr wichtige Meusnier'sche Satz: Gehen durch die nemliche Gerade der Berührungsebene ein normaler und ein schiefer Schnitt, so hängen deren Krümmungsradien R resp. R_1 durch die Relation

$$R = R_1 \sin \nu$$

zusammen, wobei ν den Neigungswinkel der zweiten Schnittebene gegen die Tangentialebene vorstellt; und diese Relation ist von der Natur der Fläche absolut unabhängig.

Ferner gab Meusnier die analytischen Charaktere, an welchen die verschiedenen Formen zu erkennen sind, welche eine Oberfläche in Bezug auf ihre Krümmungsradien haben kann. Gleichen Vorzeichen von r und ρ entspricht ein concaves oder convexes Flächenelement, ungleichen Vorzeichen dagegen ein concav-convexes oder convex-concaves und in einem derartig gestalteten Element existiren zwei Richtungen, welche eine Krümmung gleich null besitzen, wie ja dies vom Scheitel des hyperbolischen Paraboloids allgemein bekannt ist.

Von den zahlreichen Anwendungen, welche Meusnier ausgeführt hat, mögen nur noch zwei ebenso wichtige als interessante Sätze hier Erwähnung finden. Der erste (welchen wir später bei den pseudosphärischen Flächen be-

nützen werden) bezieht sich auf die Hauptkrümmungsradien einer Rotationsfläche und spricht aus, dass der eine davon gleich dem Krümmungsradius des erzeugenden Meridians sei und der andere dem Stück der Normalen zwischen dem Meridian und der Axe gleichkomme. Der zweite Satz gibt für die Minimalflächen die merkwürdige Eigenschaft, dass in jedem ihrer Elemente die beiden Hauptkrümmungsradien einander gleich aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sind, so dass deren Summe gleich null ist; von solchen Minimalflächen zählt Meusnier zwei auf, nämlich seine Schraubenfläche und die durch die Drehung der Kettenlinie um eine horizontale Axe hervorgehende Rotationsfläche.

Ziehen wir das Facit aus diesen schönen Resultaten, so werden wir uns gestehen müssen, dass sie zwar für die Theorie der Krümmung der Flächen im Allgemeinen einen ganz erheblichen Fortschritt begründen, dass sie aber die Frage des Krümmungsmasses kaum wesentlich über den Eulerschen Standpunkt hinaus gefördert haben. Die Nothwendigkeit der Übereinstimmung der Differenzialgleichung zweiter Ordnung der beiden obigen Flächen erhielt erst volle Klarheit durch die strengen Entwicklungen, die LAGRANGE ⁽¹⁴⁾ 1796 über den engeren Contact zweier Flächen in seiner Functionentheorie gegeben hat. Lagrange überträgt dabei die Bezeichnungen, mit denen wir uns bereits bei den Curven vertraut machten, auf die Flächen und gewinnt so analoge Formeln, nur dass die neuen statt einer einzigen unabhängigen Variabelen jetzt deren zwei, nemlich x und y , enthalten. Hat die Fläche, deren Gleichung $z = f(xy)$ ist, einen gemeinsamen Punkt P ($\xi \eta \zeta$) mit der zweiten Fläche $Z = F(xy)$, so existirt die Gleichung $f(\xi \eta) = F(\xi \eta)$. Ist dabei ausserdem noch

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ u. } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

für $x = \xi$ und $y = \eta$, so lässt sich zwischen beiden Flächen keine dritte durch den gemeinschaftlichen Punkt hindurch legen, welche nicht auch diesen Gleichungen genüge. Die beiden Flächen besitzen in diesem Fall einen Contact der ersten Ordnung, der zu einem der zweiten Ordnung wird, wenn die drei weitem Bedingungen hinzutreten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \text{ u. } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

für $x = \xi$ und $y = \eta$.

Dass auch d^2z in beiden Flächen übereinstimmt, wie oben Meusnier gefordert hat, leuchtet sofort ein. Stellt man an die Fläche $F(xyz) = 0$ die Forderung, dass sie in einem gewissen Punkt $(\xi \eta \zeta)$ einer gegebenen Fläche $f(xyz) = 0$ irgend welchen Contact haben soll, so werden sich die in der Gleichung $F(xyz) = 0$ enthaltenen Constanten $a, b, c \dots$ offenbar aus den Gleichungen bestimmen lassen:

$$F(\xi\eta\zeta) = 0; \overbrace{\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0}$$

u. s. f. für $x = \xi$ und $y = \eta$.

Daraus leitet sich das Resultat ab, dass der Contact erster Ordnung drei, derjenige zweiter Ordnung sechs willkürliche Constante $a, b, c \dots$ fordert und man also im allgemeinen für einen Flächenpunkt keine osculirende Kugel aufstellen kann, weil die Kugelgleichung ja bloss über drei solche Grössen verfügt. Dagegen zeigt sich die Möglichkeit der Anwendung einer solchen Fläche, welche durch die Rotation eines Kreisbogens um seine Sehne hervorgeht; denn deren Gleichung enthält sechs constante Elemente, die in keinem Abhängigkeitsverhältniss zu einander stehen; diese sind also aus den sechs Gleichungen so bestimmbar, dass ein Contact zweiter Ordnung d. h. eine Osculation der beiden Flächen stattfindet, ein Satz, welchen in andere Worte gekleidet, oben schon Meusnier ausgesprochen hat.

Osculirende Paraboloiden sind sehr genau von OLIVIER ⁽²⁹⁾ studirt worden.

Den Gedanken, dass sich die Krümmung einer Fläche durch den Winkel zweier unmittelbar auf einander folgender Tangentialebenen bestimmen lasse, finden wir nach Meusnier auch wieder von MONGE ⁽³⁰⁾ verwendet. In seinem ausgezeichneten und tiefsinnigen Werk über die Anwendung der Analysis auf die Geometrie setzt er auseinander, dass wenn aus dem Schnittpunkt von zwei unendlich nahen Normalen einer Fläche als Mittelpunkt eine Kugel beschrieben wird, deren Radius der Länge der Normalen gleichkomme, so seien diese Normalen auch solche für die Kugel und letztere habe demnach in den zwei Fusspunkten die nämlichen Tangentialebenen und folglich in ihrer Richtung auch eine gleich starke Krümmung.

Nach Monge existiren für jeden Flächenpunkt zwei sich unter rechtem Winkel kreuzende Richtungen von der Eigenschaft, dass beim Fortschreiten

nach einer dieser Richtungen vom gegebenen Punkt aus zum unendlich nahen die betreffenden Normalen sich begegnen, woraus zu schliessen sei, dass jede Fläche in jedem Punkt zweierlei Krümmungen habe, deren Richtungen in zwei unter sich rechtwinkligen Normalebene liegen und deren Mittelpunkte Punkte der Normalen seien. — Damit sind wir wieder auf dem alten Euler'schen Standpunkt angelangt, denn die Identität der neuen Krümmungsradien mit den Euler'schen springt deutlich in die Augen.

Ein anschauliches Bild der verschiedenen Fälle, welche die Krümmung einer Fläche darzubieten vermag, geben die möglichen Gestalten der Dupin'schen Indicatrix. DUPIN ⁽³¹⁾, ein würdiger Schüler des grossen Monge, construirte 1813 zu einer Fläche in einem beliebig gewählten Punkte das osculirende Paraboloid, welches nach allen Richtungen hin eine Berührung zweiter Ordnung mit der gegebenen Fläche eingeht; beide Flächen können dann in einer unendlich kleinen Ausdehnung um den gegebenen Punkt herum als zusammenfallend betrachtet werden. Eine zur Tangentialebene parallele und ihr unendlich nahe Ebene erzeugt auf dem Paraboloid eine Schnittcurve zweiten Grades, welche beiden Flächen gemeinschaftlich angehört. Dupin hat sie die Indicatrix genannt. Dieselbe repräsentirt eine Ellipse, eine Hyperbel oder ein Paar paralleler gerader Linien, je nachdem

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ist, vorausgesetzt, dass die Gleichung der Fläche in der Form $z = f(xy)$ vorliegt. Die Punkte der Fläche werden nach der Natur der Indicatrix als elliptische, hyperbolische oder parabolische Punkte bezeichnet. Jedem Normalschnitt durch den betrachteten Punkt gehört ein Krümmungsradius an, der, wie die Analysis ergibt, dem Quadrat des betreffenden halben Durchmessers der Indicatrix proportional ist; die Maximal- und Minimalwerthe entsprechen demnach offenbar den Axen dieses Kegelschnitts.

Ein elliptischer Punkt hat als osculirende Fläche ein elliptisches Paraboloid; die Radien der Indicatrix besitzen alle reelle Werthe; die Quadrate davon und demnach auch die dazu proportionalen Krümmungshalbmesser sind sämmtlich positiv; d. h. die Krümmungsradien gehen alle nach einer Richtung und die Fläche ist überhaupt nur nach dieser Seite hin gekrümmt; Beispiele

dafür geben die Punkte eines Ellipsoids. Die osculirende Fläche eines hyperbolischen Punktes besteht in einem hyperbolischen Paraboloid. Die als Indicatrix dienende Hyperbel hat sowohl reelle als imaginäre Halbmesser und deren Quadrate liefern positive und negative Werthe für die Krümmungsradien; die Hauptkrümmungsradien liegen daher auf den Normalen entgegengesetzt; alle nach oben gehenden Radien trennen die Asymptoten von den nach unten gerichteten; in der Richtung der Asymptoten selbst ist die Krümmung gleich null. Die Tangentialebene, welche zur Indicatrixebene parallel geht, schneidet die Fläche nach zwei Geraden von doppelter Berührung; sie heissen die Inflexionstangenten der Fläche und sind Parallelen zu den Asymptoten der Indicatrix, der von ihnen eingeschlossene Winkel gibt zugleich ein Mass für die Verhältnisse der Krümmung, denn bekanntlich bestimmt sich die Grösse des Asymptotenwinkels aus dem Verhältniss der Hyperbelaxen, also auch aus jenem der Hauptkrümmungsradien und umgekehrt.

Wenn die Indicatrix in einem parabolischen Punkt durch zwei gleich weit von ihm abstehende parallele Gerade vorgestellt wird, so ist das osculirende Paraboloid in einen Cylinder ausgeartet. Alle Halbmesser der Indicatrix sind reell und die Fläche ist nur nach einer Seite hin gekrümmt; in der Richtung der beiden Parallelen hat die Krümmung den Werth null. Solche parabolische Punkte kommen z. B. auf den abwickelbaren Flächen vor.

Bemerkung verdienen ferner noch solche elliptische Punkte, deren Indicatrix die Gestalt eines Kreises annimmt; sie werden Nabelpunkte genannt. Alle Normalschnitte eines Nabelpunktes z. B. des Scheitels einer Rotationsfläche zeigen constante Krümmung, die Anzahl der sich in ihm kreuzenden Krümmungslinien variirt nach der speziellen Natur desselben. Haben endlich die Hauptkrümmungsradien eines hyperbolischen Punktes abgesehen vom Vorzeichen gleiche Grösse, so ist die Indicatrix eine gleichseitige Hyperbel; alle Normalschnitte, welche in Bezug auf die Axen oder in Bezug auf die Asymptoten symmetrisch liegen, haben gleich starke Krümmung. Dieser Fall tritt auf bei sämtlichen Minimalflächen.

Wir wenden uns jetzt zum letzten misslungenen Versuch, das Problem des Krümmungsmasses für Flächen zu lösen. Was bis dahin männlicher Scharfsinn nicht zu entziffern vermochte, probirte eine mathematisch gebildete Frau, Madame SOPHIE GERMAIN, zu enträthseln ⁽³²⁾. Ihrer Feder sind mehrere

längere Abhandlungen über die Krümmung der Flächen entflossen, aus denen nach der Beseitigung von manchen unrichtigen und oberflächlichen Parthieen sich immerhin noch ein brauchbarer Kern herauschälen lässt. Doppelt schmerzlich vernimmt man daher die bittere Klage dieser Dame, dass die Mathematiker ihrer Zeit, namentlich Euler, die gewonnenen Resultate theils todtgeschwiegen, theils stillschweigend ohne Anerkennung jeglichen Verdienstes ausgenutzt haben. Wie weit diese Vorwürfe begründet sind, konnte leider nicht erhoben werden.

Ausgehend von der Euler'schen Behauptung, dass die Gesammtheit der Krümmungsradien aller Normalschnitte das einzig richtige Krümmungsmass vorstelle, schlug M. Germain dann zuerst vor, die Krümmung einer Fläche durch die Summe der reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien darzustellen, fand aber damit keinen Anklang. Desshalb nahm sie später die Summe der reciproken Werthe der Krümmungsradien sämmtlicher Curven, die durch den Schnitt der den Punkt enthaltenden Ebenen hervorgehen. Werde dabei Rücksicht auf die Meusnier'sche Formel genommen, so ergebe sich, dass bei der Bildung der Summe aller geneigten Schnitte in Bezug auf jede Normalebene jeder Werth vom Sinus mit entgegengesetzten Vorzeichen auftrete und folglich die Summe verschwinde, in der allgemeinen Summe bleiben also bloss die Werthe übrig, welche den Normalschnitten angehören. Mittelst des von Germain entdeckten Satzes

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g},$$

wo r und ρ den grössten und kleinsten Krümmungsradius und f und g jene von irgend zwei rechtwinkligen Normalschnitten bezeichnen, zeigt M. Germain, dass diese letzte Summe aller Krümmungsradien der Normalschnitte allein zusammengesetzt sei aus den unendlich mal genommenen reciproken Werthen der Hauptkrümmungsradien und zwar der Art, dass die ganze Summe als das Resultat gleichwerthiger Operationen erscheint, von denen eine einzige genüge, um die Krümmung auszudrücken, denn das Unendliche gehöre gar nicht herein und sei nur durch die Vervielfältigung der Operationen eingeschleppt worden, zu dem die Form des Raisonnements und nicht die Natur der Sache Anlass gegeben habe.

Weil dieser Beweis nicht gewürdigt worden ist, bemühte sich Madame

Germain aufs Neue, einen Ausdruck für das Krümmungsmass abzuleiten. In sehr vollständiger Weise studirte sie noch einmal die Vertheilung der linearen Krümmungen in den Normalschnitten und fand dafür immer dasselbe Arrangement. Das Gesetz, nach welchem die Krümmungen geordnet sind, zeigte völlige Uebereinstimmung mit dem Fourier'schen Theorem über die Wärmevertheilung in einem Ring, bei welchem in den Endpunkten eines Durchmessers zwei gleich starke Wärmequellen angebracht sind, während in den beiden Endpunkten des senkrechten Durchmessers auch zwei gleiche aber schwächere Wärmequellen wirken. — In den beiden zu einander senkrechten Richtungen, welche die Winkel der Hauptkrümmungsradien halbiren, herrscht gleiche Krümmung; sie wird von M. Germain die mittlere Krümmung der Fläche genannt und dieser widmete sie eine längere Betrachtung. Sie sagt: Zieht man in einer Ebene einen Kreis und nach den verschiedenen Punkten die Radien, legt ferner durch jeden eine Normalebene und lässt das Ganze eine cylindrische Biegung ausführen, so verändert sich der Mittelpunkt des Kreises nicht und nach der Biegung sind die Ebenen durch die Radien auch noch normal zur Cylinderfläche; die von den Radien gebildeten Krümmungen sind demnach die linearen Krümmungen in den verschiedenen Normalschnitten, somit hat die Biegung der Ebene zu keinem der Radien eine Krümmung bilden lassen, die in einem schiefen Schnitt enthalten wäre. Letztere können demnach als nicht zur Frage gehörig bei Seite gelassen werden. Dies würde sich noch gradeso verhalten, wenn man das Element nach zwei Richtungen zugleich gebogen hätte, vorausgesetzt, dass das Element unendlich klein sei, was ja hier zugelassen werden müsse. Unter dieser Bedingung ist die Differenz zwischen der Peripherie des Kreises in der Ebene und jener Curve, welche aus der doppelten Biegung hervorgieng, zu vernachlässigen.

Construirt man jetzt zu einem Flächenpunkt die Tangentialebene und einen beliebigen Normalschnitt, schneidet auf der Schnittcurve vom Berührungspunkt aus ein unendlich kleines Stück s ab und fällt vom andern Endpunkt ein Loth auf die Tangentialebene, so ist diese Distanzlinie indirekt dem Krümmungsradius der Curve, also direkt deren Krümmung proportional; wird diese Construction in allen übrigen Normalschnitten wiederholt, so bilden alle Distanzlinien eine Cylinderfläche, deren Basis, obgleich abhängig von der Form der Oberfläche, doch immer als ein vollständiger Kreis angesehen werden darf.

Die Mittelebenen geben die vier mittleren Distanzlinien und theilen den ganzen Mantel in vier symmetrische Stücke. Durch einen Analogieschluss ergibt sich der Satz, dass die Krümmung der Fläche der Ausdehnung der soeben construirten Distanzfläche proportional sei. — Geradeso lässt sich verfahren, fährt M. Germain weiter, auf der Kugel mittlerer Krümmung, welche die beiden mittleren Schnitte osculirt. Werden auch auf ihr vom Berührungspunkt aus die nemlichen unendlich kleinen Bogen abgeschnitten und aus den Endpunkten die Perpendikel auf die Tangentialebene gezogen, so geht die mittlere Distanzfläche daraus hervor, welche in engem Zusammenhang mit der vorigen steht. Beide haben nämlich dieselbe Ausdehnung, denn zwischen zwei Distanzlinien besteht die gleiche Relation wie zwischen den Krümmungen, denen die Distanzlinien proportional sind. Während aber die erste Distanzfläche von der Form der Oberfläche und der Quantität der Krümmung abhängt, ist die mittlere Distanzfläche einzig von der letztern abhängig und trennt so die Form der Oberfläche von der Grösse ihrer Krümmung. Die an Ausdehnung gleiche Fläche beider Cylindermäntel ist demnach das Mass der Krümmung und dahin möchte desshalb M. Germain auch die Euler'sche Ansicht, dass sich die Krümmung einer Fläche überhaupt nicht mit der einer Kugel vergleichen lasse, berichtigt haben.

Das Verdienst, das Problem des Krümmungsmasses auf ebenso geniale als einfache Weise endgiltig gelöst zu haben, gebührt unserem KARL FRIEDRICH GAUSS (geb. 1771, † 1855), dem grössten Mathematiker vielleicht aller Zeiten ⁽³³⁾. Seine *Disquisitiones generales circa superficies curvas* gehören zum Besten und Vollkommensten in der ganzen mathematischen Literatur und haben ihrem Verfasser unsterblichen Ruhm eingetragen. Dieses epochemachende Werk hat nicht nur das tiefe Dunkel, in welches bis dahin die Vergleichung der Krümmung der Flächen gehüllt war, gelichtet; es setzte die Flächen unter einander in neue überraschende Beziehungen und eröffnete der analytischen Geometrie ganz neue Gesichtspunkte, ungeahnte Bahnen, auf denen seither die Wissenschaft mit glänzenden Erfolgen weitergeschritten ist.

Zum Studium der Eigenschaften einer krummen Fläche, sagt Gauss in der Einleitung zu der oben angeführten Abhandlung, gibt es zwei allgemeine Theorien; bei der ersten bedient man sich der Gleichung zwischen den drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z , eine Relation, welche man immer auf die

Form $W(xyz) = 0$ zurückgeführt denken könne; an ihre Stelle sei auch die vollständige Differenzialgleichung $dW = Pdx + Qdy + Rdz = 0$ setzbar. Bei der zweiten Methode wird die Fläche analytisch durch drei Gleichungen definirt, welche die gewöhnlichen Coordinaten x, y, z als Funktionen von irgend zwei unabhängigen Variablen p und q ausdrücken, ein Gedanke, der sich mit klaren Worten schon in den Schriften von Euler und Lagrange angedeutet findet, dessen bedeutende Wichtigkeit und Tragweite aber erst durch Gauss gezeigt wurde. Aus der Differenziation der genannten drei Funktionen sollen die drei Gleichungen hervorgegangen sein:

$$\begin{aligned} dx &= adp + a'dq \\ dy &= bdp + b'dq \\ dz &= cdp + c'dq \end{aligned}$$

Dabei bedeuten die Coefficienten der Differenziale Funktionen der beiden Veränderlichen p und q .

An diese zwei allgemeinen Methoden reiht Gauss noch eine dritte, in welcher die eine Coordinate, etwa z , als Funktion der beiden andern auftritt, was augenscheinlich nur ein spezieller Fall von der ersten oder zweiten Methode vorstellt. Die hiezu gehörige Differenzialgleichung möge durch

$$dz = tdx + udy$$

ausgedrückt sein.

Bevor wir in die eigentliche Theorie eintreten, erinnern wir uns, dass in den ebenen Curven die Krümmung eines Bogens von sehr kleiner Länge durch das Verhältniss des Winkels zwischen den Tangenten oder den Normalen der Endpunkte zur Grösse des Bogens gemessen wird; mit andern Worten: Wenn wir einen Kreis vom Radius Eins construiren und in ihm Radien parallel zu den Normalen in den Endpunkten des vorliegenden Bogens ziehen, so stellt das Verhältniss des ausgeschnittenen Kreisbogens zum Bogen der Curve das Krümmungsmass des Bogens dar. — Zur Bestimmung des Krümmungsmasses einer gegebenen Fläche S wählt nun Gauss eine Hilfskugel vom Radius Eins; wird durch deren Centrum eine Parallele zu der Normalen eines Punktes der Fläche S gezogen, so bestimmt ihr Schnitt mit der Kugel S' auf dieser einen zweiten Punkt, den wir den correspondirenden zum ersten nennen wollen. Die Wiederholung dieser angedeuteten Construction für sämtliche Punkte einer Curve auf S wird eine

correspondirende Linie auf S' ergeben und jede Linie oder Figur auf S wird so durch eine Linie oder Figur auf S' abgebildet sein. — Jedem durch eine geschlossene Curve begrenzten Theil einer gegebenen Fläche kommt nach Gauss eine totale Krümmung zu; nemlich der Inhalt der correspondirenden Figur auf der Hilfskugel. Von dieser totalen Krümmung unterscheidet er die spezifische Krümmung oder das Krümmungsmass für einen bestimmten Punkt und bezeichnet damit den Quotienten, welchen man erhält, wenn man die totale Krümmung eines dem Punkt anliegenden Flächenelements durch den Inhalt des Elements dividirt. Das Krümmungsmass gibt demnach die Beziehung der unendlich kleinen Flächentheile an, die sich auf der Kugel und der betrachteten Fläche entsprechen. Wollte man eine Terminologie einführen, welche in der Theorie der ebenen Curven gebräuchlich ist, so müsste statt totaler Krümmung etwa Amplitude, statt Krümmungsmass dagegen einfach Krümmung gesetzt werden.

Um das Krümmungsmass in einer Formel auszudrücken, verfährt Gauss folgendermassen: Weil die Tangentialebenen in zwei correspondirenden Punkten auf der Fläche und der Kugel der Voraussetzung gemäss parallel sind, so stehen die Inhalte irgend welcher elementarer correspondirender Stücke von beiden im gleichen Verhältniss wie ihre Projectionen auf ein und dieselbe Coordinatenebene. Bedeuten x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Fläche und X, Y, Z jene des correspondirenden Punktes auf der Kugel; bezeichnen ferner $x + dx, x + \delta x$, etc., $X + dX, X + \delta X$ etc. die Coordinaten von zwei unendlich nahen Punkten in jeder der zwei Flächen, so stehen die Inhalte der durch die drei Punkte gebildeten Elementardreiecke jedenfalls in dem Verhältniss:

$$\frac{1}{2} (dX\delta Y - dY\delta X) : \frac{1}{2} (dx\delta y - dy\delta x)$$

Das Krümmungsmass in dem Punkt (x, y, z) wird somit ausgedrückt durch

$$k = \frac{dX\delta Y - dY\delta X}{dx\delta y - dy\delta x}$$

Ist die Natur der Fläche nach der obigen dritten Methode angegeben und man setzt noch die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = T; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = U \text{ u. } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = V,$$

so geht die Formel für das Krümmungsmass über in

$$k = \frac{TV - U^2}{(1+t+u)^2}$$

Die Berechnung der Radien R_1 und R_2 der Hauptnormalschnitte durch denselben gegebenen Punkt liefert hingegen den Ausdruck

$$R_1 R_2 = \frac{(1+t+u)^2}{TV - U^2}; \text{ d. h. es ist } k = \frac{1}{R_1 R_2}$$

woraus das Theorem folgt:

Das Krümmungsmass einer Fläche ist gleich einem Bruch, dessen Zähler gleich Eins und dessen Nenner das Produkt der zwei Hauptkrümmungsradien der Normalschnitte ist.

Aus diesem äusserst wichtigen Satz ersieht man, dass das Krümmungsmass einen positiven Werth annimmt für biconcave und biconvexe Flächen und negativ wird für die convex-concaven. Wenn die gegebene Fläche eine Kugel ist, so wird ihr Krümmungsmass $= \frac{1}{R^2}$ und ist für alle Punkte der Fläche constant. Die Kugel bietet demnach ein natürliches Mittel dar, um das Krümmungsmass einer beliebigen andern Fläche in einem gewissen Punkt zur Anschauung zu bringen. Denn setzt man

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{R^2}, \text{ so folgt } R = \sqrt{R_1 R_2},$$

wo jetzt R den Halbmesser einer Kugel repräsentirt, welche in allen Punkten ihrer Oberfläche dasselbe Krümmungsmass besitzt, wie die betrachtete Fläche. Dieser Kugelhalbmesser darf indessen nicht ein Krümmungshalbmesser dieser Fläche genannt werden, weil diese Kugel im Allgemeinen keine osculirende sein wird. Zudem hört der Begriff dieses Kugelhalbmessers auf, reell zu sein, sobald R_1 und R_2 verschiedene Vorzeichen haben.

Der soeben bestimmte Kugelhalbmesser hat noch eine andere bemerkenswerthe Eigenschaft. Stellt man sich die Aufgabe, von den Krümmungsradien aller Normalschnitte das arithmetische Mittel zu bestimmen, so liefert die Analysis dafür den Werth $\sqrt{R_1 R_2}$, vorausgesetzt, dass R_1 und R_2 gleiche Vorzeichen haben. Daraus fliesst der GRUNERT'sche Satz ⁽³⁵⁾: Das arithmetische

Mittel der Krümmungsradien aller Normalschnitte in einem gegebenen Punkt einer Fläche ist gleich dem Halbmesser einer Kugel, welche dieselbe Krümmung besitzt wie die vorliegende Fläche in dem bestimmten Punkt.

Kehren wir nun zur obigen Formel für das Krümmungsmass zurück, so haben wir in Bezug auf ihre Herleitung zu bemerken, dass das Gauss'sche Verfahren an Eleganz von dem BALTZER'schen mittelst Funktionaldeterminanten entschieden übertroffen wird ⁽³⁶⁾.

Durch sehr weitläufige Operationen gewinnt Gauss ferner den Werth für k als Funktion der zwei unabhängigen Variablen p und q . Wenn zur Abkürzung

$$\begin{array}{lll} bc' - b'c = A & A\alpha + B\beta + C\gamma = D & a^2 + b^2 + c^2 = E \\ ca' - c'a = B & A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D' & a'^2 + b'^2 + c'^2 = G \\ ab' - a'b = C & A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D'' & aa' + bb' + cc' = F \end{array} \quad \text{u.}$$

gesetzt wird, so folgt für das Linienelement ds auf der Fläche der sehr wichtige Ausdruck

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2;$$

$$\text{ferner wird } k = \frac{DD'' - D'^2}{A^2 + B^2 + C^2} \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} 4(EG - F^2)k = & E \left[\frac{\partial E}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial q} - 2 \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} + \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)^2 \right] \\ & + F \left(\frac{\partial E}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} + \frac{\partial E}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - 2 \frac{\partial E}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial q} + 4 \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} - 2 \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial p} \right) \\ & + G \left[\frac{\partial E}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial p} - 2 \frac{\partial E}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} + \left(\frac{\partial E}{\partial q} \right)^2 \right] \\ & - 2(EG - F^2) \left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} \right) \end{aligned}$$

oder nach WILLIAMSON ⁽³⁷⁾

$$(EG - F^2) k = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial q^2}, & \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p}, & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial p}, & E, & F, \\ \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial q}, & F, & G, \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}, & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial q}, & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial q}, & E, & F, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p}, & F, & G, \end{vmatrix}$$

Statt letzterer Formel hat H. Liouville ⁽³⁸⁾ folgende, weit elegantere, angegeben:

$$2 \sqrt{EG - F^2} \cdot k = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial G}{\partial p} + \frac{F}{G} \frac{\partial G}{\partial q} - 2 \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial E}{\partial q} - \frac{F}{G} \frac{\partial G}{\partial p} \right) \right]$$

Eine direkte Ableitung der Formel für das Krümmungsmass in Funktion der Variablen p und q verdankt man H. v. Escherich ⁽³⁹⁾; nach ihm ist:

$$(A^2 + B^2 + C^2) \cdot k = \begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{\partial A}{\partial p} & \frac{\partial B}{\partial p} & \frac{\partial C}{\partial p} \\ \frac{\partial A}{\partial q} & \frac{\partial B}{\partial q} & \frac{\partial C}{\partial q} \end{vmatrix}$$

oder in E , F und G ausgedrückt:

$$(EG - F^2)^{2,k} =$$

0	0	$\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial p},$	$\left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p} \right)$	$F,$	E
0	0	$\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p},$	$\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial q},$	$G,$	F
$-\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial q},$	$-\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p},$	0	$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} \right),$	$\left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial q} \right),$	$\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial p}$
$-\left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p} \right), -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial q},$	$\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial q}, -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} \right),$	0	0	$\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p},$	$\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial q}$
$-F,$	$-G,$	$-\left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial q} \right),$	$-\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p},$	0	0
$-E,$	$-F,$	$-\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial p},$	$-\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial q},$	0	0

Letztere Determinante ist eine symmetrale Determinante sechsten Grades mit leerer Diagonale und stellt also ebenso wie k selbst ein vollständiges Quadrat vor.

Auf jeder Fläche können zwei Liniensysteme geschaffen werden; das erste für ein variables p und constantes q , das zweite für ein variables q und constantes p . Jeder Flächenpunkt tritt dann als Schnittpunkt einer Curve des ersten Systems mit einer Curve vom zweiten System auf. Der Winkel ω , den diese beide Curven bei ihrer Begegnung bilden, wird durch die Formel

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

angegeben. Wählt man die Veränderlichen p und q in der Art, dass $\cos \omega = 0$ oder $F = 0$ ist, so tritt eine wesentliche Reduktion sämtlicher Formeln ein. Für das Linienelement erhält man z. B. $ds^2 = Edp^2 + Gdq^2$; ferner wird

$$4E^2G^2k = E \cdot \frac{\partial E}{\partial q} \cdot \frac{\partial G}{\partial q} + E \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)^2 + G \frac{\partial E}{\partial p} \cdot \frac{\partial G}{\partial p} + G \left(\frac{\partial E}{\partial q} \right)^2 - 2EG \left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} \right)$$

Stellen ρ_1 und ρ_2 die Radien der geodätischen Krümmung der Curven vor, welche dargestellt sind durch die Gleichungen $q = \text{const.}$, resp. $p = \text{const.}$, so ist nach H. LIOUVILLE ⁽⁴⁰⁾

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{1}{2E\sqrt{G}} \frac{\partial E}{\partial q}; \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{2G\sqrt{E}} \frac{\partial G}{\partial p} \quad \text{und}$$

$$k = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial q} \frac{\sqrt{E}}{\rho_1} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\sqrt{G}}{\rho_2} \right)$$

Nimmt man zu den Linien $q = \text{const.}$ speziell geodätische Curven, deren orthogonalen Trajectorien die Linien $p = \text{const.}$ sind und bezeichnet p die Länge jeder Linie vom ersten System und zwar gezählt vom gemeinschaftlichen Ausgangspunkt dieser Linien, oder wenn kein solcher existirt, von irgend einer Curve des zweiten Systems aus, so wird

$$E = 1; \quad ds^2 = dp^2 + Gdq^2$$

$$k = - \frac{1}{V G} \cdot \frac{\partial^2 V G}{\partial p^2} \quad \text{oder für } m = V G$$

$$k = - \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial p^2},$$

worin m im Allgemeinen eine Funktion von p und q ist.

In der Beantwortung der Preisfrage der Kopenhager Akademie hat Gauss⁽⁴⁰⁾ gezeigt, dass Liniensysteme existiren, für welche $E = G$ und $F = 0$ ist; heissen diese neuen Variabelen nun α und β , so tritt für das Linienelement ds die Formel auf:

$$ds^2 = \lambda (d\alpha^2 + d\beta^2),$$

wo λ eine Funktion von α und β ist. H. LIOUVILLE⁽⁴¹⁾ hat den Beweis der Existenz von unendlich vielen derartigen Systemen in der grössten Allgemeinheit durchgeführt und für das Krümmungsmass den stets giltigen Ausdruck abgeleitet:

$$k = \frac{1}{R_1 R_2} = - \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \beta^2} \right)$$

Für $\alpha + i\beta = x$ und $\alpha - i\beta = y$ folgt $ds^2 = \varphi^2 dx dy$; hier ist φ eine Funktion von x und y . Nach H. BONNET⁽⁴²⁾ wird für diese Variabelen

$$k = \frac{1}{2\varphi^2} \cdot \frac{\partial^2 \log \varphi^2}{\partial x \partial y}$$

Mit der Theorie der Oberflächen nach der Richtung des Krümmungsmasses hat sich in neuerer Zeit besonders auch Herr BELTRAMI⁽⁴⁴⁾ mit Erfolg beschäftigt. Er führte den Begriff der Differenzialparameter erster und zweiter Ordnung einer Funktion $\varphi(p, q)$ der Gauss'schen Variabelen p und q ein in den definirten Formeln:

$$\Delta \varphi_1 = \frac{E\varphi_2^2 + 2F\varphi_1\varphi_2 + G\varphi_1^2}{EG - F^2};$$

$$\Delta \varphi_2 = \frac{1}{V EG - F^2} \left\{ \left(\frac{G\varphi_1 - F\varphi_2}{V EG - F^2} \right)_1 + \left(\frac{E\varphi_2 - F\varphi_1}{V EG - F^2} \right)_2 \right\},$$

wo durch die Indices 1 und 2 die Differenziation nach p resp. q bezeichnet wird und als Zwischenparameter zweier Funktionen φ und ψ der nachstehende Ausdruck:

$$\Delta_1 \varphi \psi = \frac{E\varphi_2\psi_2 - F(\varphi_2\psi_1 + \varphi_1\psi_2) + G\varphi_1\psi_1}{EG - F^2}$$

Die Gleichung $\Delta_1 \varphi \psi = 0$ bedingt die Rechtwinkligkeit der beiden Curvensysteme $\varphi = \text{const.}$ und $\psi = \text{const.}$ Das Krümmungsmass der Fläche und die geodätische Krümmung der Curve $\varphi = \text{const.}$ drücken sich aus durch

$$k = \Delta_2 \log. (\text{mod. } x); \quad \frac{1}{r} = \frac{\Delta_2 \varphi}{V \Delta_1 \varphi} - \frac{\delta V \Delta_1 \varphi}{\delta \varphi}$$

für x als einen integrierenden Faktor des linearen complexen Differenzialausdrucks vom Modul ds^2 und wenn das Zeichen δ den simultanen Änderungen entspricht, die bei $\Delta_1 \varphi$ und φ aus einer zur Curve $\varphi = \text{const.}$ normalen Verückung entstehen.

Für ρ als den kürzesten Bogen vom Anfangspunkt nach einem beliebigen Punkt der Fläche findet man dann den von seiner Richtung unabhängigen Grenzwert, der ein neuer Ausdruck für das Krümmungsmass ist, nemlich:

$$\lim. \left(\Delta_2 \log. \frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{3} k$$

Nach diesen Excursionen wenden wir uns wieder zur Gauss'schen Abhandlung zurück.

Die Vergleichung des allgemeinen Ausdrucks für das Linienelement $ds = \sqrt{E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2}$ mit jenem für das Krümmungsmass führte Gauss zu der Folgerung, dass man zur Bestimmung des Krümmungsmasses gar keiner bestimmten Formeln bedürfe, welche die Coordinaten x, y, z in den unabhängigen Veränderlichen p und q ausdrücken, sondern es genüge ja schon vollständig die Kenntniss des Ausdrucks für die Grösse des Linienelements d. h. es sei das Krümmungsmass nur vom Linienelement abhängig. Von diesem sehr wichtigen Satz gibt Gauss einige Anwendungen; er sagt, man denke sich, dass die vorliegende Fläche so auf eine andere gelegt werden könne, dass jedem durch die Coordinaten x, y, z bestimmten Punkt der ersten Fläche ein Punkt der zweiten Fläche entspreche, dessen Coordinaten x', y', z' seien, so leuchtet ein, dass x', y', z' als Funktionen von p und q angesehen werden können,

woraus für das Linienelement $\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$ sich ein Ausdruck ergebe wie $\sqrt{E'dp^2 + 2F'dpdq + G'dq^2}$, in welchem E' , F' und G' auch Funktionen von p und q vorstellen. Aber bei der Abwicklung, um welche es sich hier handle, müssen die correspondirenden Linienelemente beider Flächen gleich gross sein; man habe also die drei Identitäten: $E' = E$, $F' = F$ und $G' = G$.

Diese liefern jetzt gleichsam durch Zufall das höchst wichtige und interessante Theorem:

„Wenn eine Fläche auf irgend eine andere abgewickelt wird, so bleibt das Krümmungsmass in jedem Punkte unverändert.“

Bis auf Gauss hatten die Geometer nur die auf eine Ebene abwickelbaren Flächen in den Bereich ihrer Untersuchungen gezogen. Die Gauss'sche Theorie lehrt nun auf solche Flächen angewendet ganz selbständig, dass in jedem ihrer Punkte das Krümmungsmass $= 0$ sein muss; wesshalb alle diese Flächen nach der dritten Methode analytisch durch $rs - t^2 = 0$; d. h. durch

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

definiert sind, eine Gleichung, welche schon längst bekannt war. Den Beweis dafür, dass diese partielle Differenzialgleichung oder die äquivalente Gleichung $\frac{1}{R_1 R_2} = 0$ wirklich bloss einer abwickelbaren Fläche angehören kann, hat H. Liouville⁽⁴⁵⁾ durchgeführt.

Gauss betrachtete nun im weitem Verlauf seiner Untersuchungen die Flächen nicht mehr als die Grenzgebilde der Körper, sondern als ganz selbstständige Raumformen. Sie stellten sich ihm anschaulich dar in der Form von biegsamen, undehnbaren Körpern, von denen eine Dimension unendlich klein angesehen werden musste, wodurch der Begriff der Biegung ohne Zerrung einen festen Sinn bekam. Dadurch traten die mannigfaltigsten Flächen, die sonst als total verschiedenartig angesehen worden waren, in ungeahnten Zusammenhang, nemlich alle jene Flächen, die sich durch Biegung auf einander zurückführen lassen. Dass solche Flächen z. B. die auf eine Ebene abwickelbaren nicht in allen ihren geometrischen Eigenschaften übereinstimmen, liegt auf der Hand, denn gar manche werden von der speziellen Form und demnach von den mannigfachen Arten der Biegung, welche die Fläche annehmen kann, abhängen, wäh-

rend wieder andere für alle möglichen Biegungsformen constant bleiben; zu diesen absoluten und unveränderlichen Eigenschaften gehören ausser dem Krümmungsmass namentlich auch solche, für die nur die Länge des Linienelements in Betracht kommt, Eigenschaften, deren Studium der Geometrie ein ganz neues und sehr weites Feld eröffnet hat. Für alle sich hier anschliessenden Untersuchungen musste, wie aus den seitherigen Betrachtungen klar hervorgeht, der allgemeine Ausdruck für das Linienelement den Ausgangspunkt bilden und derselbe Ausdruck erwies sich, wie wir später zeigen werden, als die Basis der gesamten geometrischen Wissenschaft.

Auf den Gauss'schen analytischen Beweis der Unveränderlichkeit des Krümmungs-Masses bei der Biegung sind einige andere Beweise gefolgt, welche kurz erwähnt werden sollen.

MINDING ⁽⁴⁶⁾ denkt sich die Spitze einer n kantigen Ecke im Mittelpunkt einer Kugel vom Radius Eins. Die Grenzflächen der Ecke schneiden auf der Kugeloberfläche ein Polygon α aus, dessen Polarfigur β heissen möge. Dann ist der Umfang von α vermehrt um den Inhalt von $\beta = 4R$. Wenn $n > 3$ angenommen wird, so ist die Ecke biegsam, aber bei der Biegung von α bleibt der Umfang von α , somit auch der Inhalt von β constant. Diese Bemerkung lässt sich nach Minding auf die Biegung einer krummen Fläche anwenden. Ein beliebiger Punkt eines Flächenelements w kann als Spitze einer durch dieses umliegende Flächenelement gebildeten Ecke von unzählig vielen Kanten vorgestellt werden, in welchem die Summe der Kantenwinkel, also auch der Umfang des correspondirenden Polygons α auf der Kugel nahezu $4R$ beträgt. Alsdann ist offenbar die totale Krümmung w' von w auf der Kugel die Polarfigur zu α , weil die durch dessen Umfang gehenden Halbmesser den im Umfang von w gezogenen Normalen parallel laufen und auf den Grenzflächen der Ecke w der Reihe nach senkrecht sind. Da nun die Biegung den Umfang von w nicht verändert, so ändert sich auch der Inhalt von w' nicht, es bleibt demnach auch das Krümmungsmass $\frac{w'}{w}$ das gleiche.

BERTRAND ⁽⁴⁷⁾ construirte sich um den Punkt der Fläche, dessen Krümmungsmass festgestellt werden soll, als Pol einen unendlich kleinen geodätischen Kreis mit dem Radius s . Die Peripherie dieses Kreises besitzt die Länge

$$l = 2\pi s - \frac{\pi s^3}{3R_1 R_2}$$

wobei R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien in dem betrachteten Punkt vorstellen. Bei der Biegung lässt die Länge der Kreisperipherie und der Radius s keine Veränderung zu; es muss daher auch $\frac{1}{R_1 R_2}$ oder das Krümmungs-Mass constant bleiben.

PUISEUX ⁽⁴⁷⁾ wendete ganz analoge Betrachtungen an. Er sagt: Denkt man sich durch einen Punkt m einer von zwei gegebenen Flächen alle möglichen geodätischen Linien gezogen und auf jeder von m aus unendlich kleine Bogen von gleicher Länge s abgeschnitten, so bilden die Endpunkte dieser Bogen eine geschlossene Curve. Macht man genau die nemliche Construction auf der andern Fläche vom Punkt m' aus, der mit m correspondirt, so erhält man eine neue geschlossene Curve, welche die correspondirende von der erstern sein wird und welche folglich gleiche Länge haben muss, wenn die Flächen in einander transformirbar sein sollen. Die Berechnung des Umfangs l gibt

$$l = 2\pi s - \frac{\pi s^3}{3R_1 R_2}$$

auf der ersten Fläche und für die correspondirende Curve auf der zweiten Fläche findet man ähnlich

$$l' = 2\pi s - \frac{\pi s^3}{3R'_1 R'_2}$$

Da nun diese Ausdrücke gleich sein müssen, wie klein auch s sein mag, so muss auch

$$R_1 R_2 = R'_1 R'_2$$

sein, was zu beweisen war.

Doch nicht allein der Umfang von diesem geodätischen Kreis behält bei der Biegung seine Länge bei; der eingeschlossene Flächeninhalt ändert sich ebenfalls nicht. Durch die Berechnung dieses Inhaltes soll DIQUET ⁽⁴⁷⁾ einen weiteren Beweis des Gauss'schen Satzes abgeleitet haben.

Eine sehr schöne analytische Ableitung des Theorems der Unveränderlich-

keit des Krümmungsmasses bei der Biegung hat H. LIOUVILLE ⁽⁴⁷⁾ angegeben. Den Ausdruck für das Linienelement ds nahm er in der Form $ds^2 = \lambda (d\alpha^2 + d\beta^2)$ und erhielt dann für das Krümmungsmass

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \beta^2} \right).$$

Wenn eine Fläche in eine andere ohne Dehnung und Zerrung transformirbar ist, so kann das Linienelement ds auf gleiche Weise durch die Variabeln α und β auf beiden Flächen ausgedrückt werden, und da der Faktor λ beiderseits identisch ist, so wird das Produkt $R_1 R_2$ und damit auch das Krümmungsmass dasselbe sein.

Alle diese zahlreichen Beweise lassen etwas zu wünschen übrig; die einen sind direkt, führen aber nicht zum Ausdruck für das Krümmungsmass; die andern wie die von Gauss und Liouville geben zwar diesen Ausdruck, sind jedoch indirekt und setzen das Theorem schon als bekannt voraus. Keiner dieser gerügten Mängel haftet an dem Beweis von H. Bonnet ⁽⁴⁸⁾. Als Ausgangspunkt wählt er die Beziehung, welche die Gleichheit der correspondirenden Linienelemente der beiden Flächen ausspricht. Durch einige geschickte Transformationen wird dann H. Bonnet auf eine natürliche und gleichsam unvermeidliche Art zum Gauss'schen Satze geführt, sowie zum allgemeinen Ausdruck für das Krümmungsmass, wie derselbe oben bereits angegeben worden ist.

Bevor wir auf die Theorie der Abwicklung der Flächen eingehen, welche die Geometer auf den Gauss'schen Satz gegründet haben, wollen wir vorher noch unser Augenmerk nach einer andern Seite richten, welche zu einer Verallgemeinerung des Begriffs des Krümmungsmasses Anlass gegeben hat.

Aus den trefflichen Arbeiten von Monge erkannten wir die enge Beziehung zwischen der Theorie der Krümmung der Flächen und der Theorie ihrer Normalen. Fassen wir alle Normalen einer und derselben Fläche ins Auge, so bildet deren Gesammtheit ein geradliniges Strahlensystem im Raum, wie es z. B. die Natur hervorzaubert, wenn die von einem Punkt ausgehenden Lichtstrahlen eine beliebige Anzahl von Reflexionen an beliebig gestalteten Spiegeln und von Refractionen beim Durchgang durch willkürlich begrenzte Medien von verschiedener brechender Kraft erleiden. Lässt man derartige Lichtstrahlen noch den Weg durch Kristalle nehmen, so verlieren sie die ihnen bis dahin innewohnende Eigenschaft, auf einer Fläche normal zu stehen; sie

bilden jetzt ein irreguläres Strahlensystem, welches zur Betrachtung der allgemeinsten Systeme d. h. solcher, die den Raum derartig erfüllen, dass durch jeden Punkt ein Strahl oder eine beschränkte Anzahl discreter Strahlen hindurchgeht, den Anstoss geliefert hat. Die Strahlensysteme sind zuerst von HAMILTON ⁽⁴⁸⁾ untersucht worden und ihm verdanken wir die Kenntniss einer stattlichen Reihe ausgezeichnete Eigenschaften der Strahlensysteme. Hamiltons Theorie erfuhr später eine neue Begründung und wesentliche Vervollkommnung durch H. KUMMER ⁽⁴⁹⁾ und in neuerer Zeit durch H. Paul du Bois-Reymond ⁽⁵⁰⁾; fünf Jahre später (1869) folgte dann darüber die berühmte Arbeit von PLÜCKER ⁽⁵¹⁾, nach dessen Terminologie unsere Strahlensysteme Congruenzen heissen. Um den nahen Zusammenhang der Theorie dieser Systeme mit der Theorie der Flächen, die als ein spezieller Fall der ersteren auftritt, klar zu machen, entnehmen wir der ausgezeichneten Kummer'schen Abhandlung den nachfolgenden Auszug:

Jede gerade Linie des Strahlensystems soll bestimmt werden durch die drei Coordinaten x, y, z eines ihrer Punkte und durch seine Richtungscosinusse ξ, η, ζ in Bezug auf die Axen eines orthogonalen Coordinatensystems. Das Gesetz, welches die Geraden zu einem System verbindet, wird gegeben, indem man die sechs Grössen $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ als continuirliche Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen u und v betrachtet. Die Punkte x, y, z erfüllen alsdann eine bestimmte Fläche und die Strahlen des Systems werden alle als von den einzelnen Punkten der Fläche ausgehend angesehen werden dürfen. — Fixirt man nun in einem solchen System einen beliebigen Strahl, so lässt sich zu einem unendlich benachbarten Strahl der kürzeste Abstand nebst der Abscisse r seines Fusspunkts auf dem ersten Strahl berechnen. Die Formel für letztere Abscisse lehrt dann, dass die Fusspunkte der kürzesten Abstände sämmtlicher unendlich nahen Strahlen in einem durch zwei Punkte begrenzten Theil des ersten Strahles liegen und dass die kürzesten Abstände von denjenigen zwei unter den unendlich vielen unendlich nahen Strahlen, für welche die Fusspunkte in den Grenzpunkten selbst liegen, senkrecht gegen einander gerichtet sind. Die beiden Ebenen durch den Strahl und die genannten Abstände sollen die Hauptebenen heissen; die zwei Hauptebenen sind also auf einander senkrecht. Auf dem Strahl gibt es ferner zwei reelle oder imaginäre Punkte, Brennpunkte genannt, in welchen der Strahl von unendlich nahen Strahlen geschnitten wird. Der Mittelpunkt der Brennpunkte coincidirt mit dem Mittel-

punkt der Grenzpunkte, deren Entfernung ausserdem immer grösser als die der Brennpunkte ist. Die beiden den Strahl in den Brennpunkten treffenden Strahlen bestimmen mit ihm zwei Ebenen, die als seine Focalebenen bezeichnet werden; letztere besitzen gegen die Hauptebene eine symmetrische Lage; ihre Winkel werden von den zwei Hauptebenen halbirt.

Nennt man den Mittelpunkt der Grenzpunkte kurzweg den Mittelpunkt vom Strahl, so hat jeder Strahl demnach fünf ausgezeichnete Punkte, deren geometrische Örter fünf Flächen erfüllen, welche mit dem Strahlensystem aufs Engste zusammenhängen. Die beiden Flächen F_1 und F_2 , in welchen die Grenzpunkte liegen, theilen den ganzen Raum in der Art ab, dass zwischen ihnen die kürzesten Abstände sämtlicher unendlich nahen Strahlen des ganzen Systems enthalten sind. Die Brennflächen Φ_1 und Φ_2 d. h. die Flächen der Brennpunkte sind natürlich nur mit diesen selbst reell. Geht man von einem beliebigen Strahl aus zu demjenigen, welcher ihn in dem auf Φ_1 liegenden Brennpunkt schneidet, von diesem weiter zum folgenden dritten, welcher den zweiten in dem ebenfalls auf Φ_1 liegenden Brennpunkt trifft u. s. f., so erhält man in diesen Strahlen die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche, deren Rückkehrkannte in Φ_1 enthalten ist. Da man dabei von jedem beliebigen Strahl des Systems ausgehen kann, so folgt die Existenz einer ganzen Schar von derartigen devoloppablen Flächen. Geradeso bekommt man noch eine zweite Schar, wenn von den auf Φ_2 befindlichen Brennpunkten ausgegangen wird. Diese Möglichkeit, die Strahlen des Systems in doppelter Weise zu einer Schar abwickelbarer Flächen zusammenzufassen, die ihre Rückkehrkanten in den Brennflächen haben, charakterisirt die Strahlensysteme mit realen Brennflächen; man sieht auch, dass alle Strahlen eines Systems mit reellen Brennflächen gemeinschaftliche Tangenten dieser zwei Flächen sind; wodurch nun das Strahlensystem auch geometrische Anschaulichkeit erhalten hat.

Betrachtet man jetzt die drei Grössen ξ, η, ζ , welche durch die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ verbunden sind, als die rechtwinkligen Coordinaten einer Kugel vom Radius Eins, so hat man dadurch nach dem Gauss'schen Grundgedanken jedem Strahl des Systems einen Punkt der Kugel zugeordnet, und wenn man sich nun weiter durch einen Punkt des Strahls eine zu letzterem normale Ebene construirt und in ihr um jenen Punkt eine unendlich kleine geschlossene Curve f zeichnet, so entspricht ihr mittelst der durch die Punkte der Peripherie

gehenden Strahlen auf der Kugel eine gleichfalls geschlossene Curve φ mit unendlich kleinem Flächeninhalt. Kummer nennt das Verhältniss $\frac{\varphi}{f}$ beider Flächen das Dichtigkeitsmass des Systems in dem betreffenden Punkt; hat dieser vom Anfangspunkt seines Strahles die Abscisse R , während die der Brennpunkte $= \rho_1$ resp. ρ_2 sind; so wird das Dichtigkeitsmass Θ ausgedrückt durch

$$\Theta = \frac{1}{(\rho_1 - R)(\rho_2 - R)}$$

d. h. dasselbe ist gleich dem reciproken Werth des Produkts der Entfernungen dieses Punktes von den beiden Brennpunkten. Es ist daher stets reell. Für Strahlensysteme mit reellen Brennflächen hat es für Punkte zwischen den Brennflächen einen negativen Werth, dagegen einen positiven für alle Punkte ausserhalb derselben; ferner ist es in den Mittelpunkten jeden Strahls absolut genommen am grössten und unendlich in den Brennpunkten. Sind die Brennpunkte imaginär, so ist es stets positiv und hat im Mittelpunkt jeden Strahls sein Maximum. — Die Strahlen, welche der Peripherie von f angehören, bilden ein unendlich dünnes Strahlenbündel und f repräsentirt den zur Abscisse R gehörigen Querschnitt. Ist dann f' der Querschnitt, welcher der Abscisse R' zukommt, so bleibt φ unverändert und man findet, dass die Flächeninhalte zweier Querschnitte sich umgekehrt wie die Dichtigkeitsmasse der correspondirenden Stellen verhalten. Die Benennung „Dichtigkeitsmass“ wird hiedurch vollständig gerechtfertigt, denn innerhalb eines und desselben Bündels stehen die Dichtigkeiten im Verhältniss der Dichtigkeitsmasse.

Für zwei verschiedenen Strahlen des Bündels angehörige Punkte ist das Verhältniss der Dichtigkeiten der Strahlen nicht nothwendig gleich dem Verhältniss der Dichtigkeitsmasse; denn, wenn das Strahlensystem, wie es oben angenommen worden ist, so bestimmt wird, dass von jedem Punkt einer Fläche, die als geometrischer Ort der Ausgangspunkte aller Strahlen gewählt ist, nach irgend einer bestimmten Richtung ein Strahl geht, so kann die Dichtigkeit der Strahlen an dieser Fläche irgend wie bestimmt sein als eine Funktion der Coordinaten des Ausgangspunktes oder als eine Funktion der beiden Variablen u und v und erst durch diese Bestimmung wird die Dichtigkeit der Strahlen in sämtlichen Punkten des ganzen Systems zu einer eindeutig bestimmten. Die Dichtigkeit selbst ist darum gleich dem Dichtigkeitsmass multipliziert mit einer

Funktion von u und v , welche die Abscisse R nicht enthält und deshalb für die verschiedenen Punkte eines Strahls constant ist.

Alle jene Punkte in den Strahlen des Systems, welche das nämliche Dichtigkeitsmass Θ haben, liegen in einer Fläche gleichen Dichtigkeitsmasses. Weil man aber dem Dichtigkeitsmass alle möglichen Werthe verleihen kann, so folgt, dass in jedem Strahlensystem eine ganze Schar solcher Flächen existirt; zu ihnen gehören auch die beiden Brennflächen; sie entsprechen dem Werth $\Theta = \infty$.

Geht man von den allgemeinen Strahlensystemen nun zu solchen speziellen Systemen über, deren Strahlen sämtlich Normalen einer und derselben Fläche sind, so liefert die Rechnung den Nachweis, dass in diesen Systemen die Focalebene mit den Hauptebenen und die Brennpunkte mit den Grenzpunkten zusammenfallen. Für eine der Flächen, deren Normalen die Strahlen des Büschels sind, repräsentiren die Grenz- und Brennpunkte die beiden Hauptkrümmungscentra, die Brennflächen des Systems, die mit den Grenzflächen coincidiren, stellen die von Monge behandelten Flächen vor, in denen die Mittelpunkte aller Hauptkrümmungskreise enthalten sind. Die Theorie der Krümmung der Fläche bildet demnach nur einen speziellen Fall der Theorie der Strahlensysteme. Untersucht man, ob die letztere allgemeinere Theorie vielleicht neue Sätze für die Theorie der Krümmung und der Normalen liefere, so zeigt sich, wie zu erwarten war, nur eine magere, unwesentliche Ausbeute. Dagegen findet man der Reihe nach die bekannten Sätze über die Krümmung der Flächen in allgemeinerer Form und Bedeutung in der Theorie der Strahlensysteme. Das Gauss'sche Krümmungsmass ist in dem Begriff des Dichtigkeitsmasses eingeschlossen und seinem Ausdruck entspricht vollständig der oben angeführte Ausdruck des Dichtigkeitsmasses. Für jene Strahlensysteme, welche von den Normalen einer Fläche gebildet werden, erweist sich das Dichtigkeitsmass als vollständig identisch mit dem Krümmungsmass, da in jedem Punkt des Raums das Dichtigkeitsmass der Strahlen dem Krümmungsmass der durch diesen Punkt gehenden Fläche gleich ist; die zur angenommenen parallel ist. Es zeigt sich auch hierin, sagt H. Kummer, wie die von Gauss in die Wissenschaft eingeführten Begriffe durchgängig denjenigen Charakter der Allgemeinheit in sich tragen, durch welchen sie ihren Einfluss weit über die Gebiete hinaus erstrecken, in denen sie ursprünglich entstanden sind.

IV. Kapitel.

Von der Deformation der Flächen.

Wenn zwei Flächen ohne Dehnung und Zerrung ihrer Theile auf einander abgewickelt werden können, so besitzen sie dem Gauss'schen Satz zufolge in zwei correspondirenden Punkten das gleiche Krümmungsmass. Es liegt nun sehr nahe, zu fragen: hat der reciproke Satz auch Giltigkeit; sind zwei Flächen S und S' stets auf einander abwickelbar, wenn die Krümmung in entsprechenden Punkten gleichen Werth besitzt? Die Entscheidung darüber finden wir in einer geistreichen Arbeit von MINDING ⁽⁵⁰⁾, auf welche wir noch mehrere Mal zu sprechen kommen werden. Bei der Lösung des angedeuteten Problems müssen nach Minding die beiden Fälle auseinandergehalten werden, ob der Werth des Krümmungsmasses für alle Punkte einer Fläche constant ist oder von Punkt zu Punkt variirt. Für den ersten Fall ergab die Analysis, wie zum voraus zu erwarten war, das Resultat, dass zwei Flächen von beiderseitig constantem und gleichem Krümmungsmass immer auf einander abgewickelt werden können und zwar auf unendlich viele Arten; eine solche Abwicklung ist bestimmt, wenn man zwei beliebigen Punkten von der ersten Fläche zwei andere gleich weit von einander entfernte der zweiten Fläche zuordnet.

Weit mehr Schwierigkeiten bietet der zweite Fall.

Das Gauss'sche Theorem stellt allerdings für die Deformation eine Bedingung auf, doch erweist sich diese, wenn das Krümmungsmass veränderlich ist, als durchaus ungenügend. Um beurtheilen zu können, ob in diesem Fall die Biegung eintreten könne oder nicht, muss nothwendig auf die Gleichheit der einander entsprechenden Linienelemente ds und ds' der zwei Flächen zurückgegangen werden, denn in dieser Gleichheit liegt offenbar der wahre Charakter derjenigen Transformation begründet, von welcher hier die Rede ist. — Für die Abhängigkeit der beiderseitigen Coordinaten gewinnt dann Minding durch äusserst mühsame Rechenoperationen lange Differenzialausdrücke, welche wir hier nicht reproduciren wollen.

Den von Minding eingeschlagenen Gedankengang hat, wie mit wenig Scharfblick ersichtlich, auch H. LIOUVILLE⁽⁵³⁾ in seiner übrigens sehr eleganten Untersuchung über fraglichen Gegenstand befolgt. Leider finden wir aber Minding von Liouville nirgends erwähnt. — Sehr grosse Analogieen mit der Minding'schen Lösung zeigt ferner die Lösung, welche H. BONNET⁽⁵³⁾ gegeben hat; letztere übertrifft die erstere weit an Klarheit und Durchsichtigkeit und führt ausserdem noch zu einigen neuen bemerkenswerthen Entwicklungen. —

Durch die von Gauss bestimmte Art der Biegung kann jede nicht geschlossene Fläche oder ein Theil einer vollständig unbegrenzten in unzählig viele neue Formen übergeführt werden. Zum Beispiel gestattet jede Regelfläche eine successive Drehung um jede Erzeugende als Axe, so dass aus ihr etwa eine Fläche hergestellt werden könnte mit Charakteristiken, welche alle einer Ebene parallel laufen. Es ist nun die Aufgabe der Analysis, auf dem Weg der Rechnung all die Flächen zu bestimmen, in welche irgend eine gegebene Fläche deformirt zu werden vermag. Die Lösung dieses Problems gelingt in einzelnen Fällen, dagegen führt die allgemeine Lösung zu einer partiellen Differenzialgleichung, welche zu complicirter Natur ist, um eine vollständige Integration zu ermöglichen. Wir können jedoch auf das ausgedehnte Gebiet der allgemeinen Deformationstheorie als dem Zweck unserer Abhandlung zu fern liegend, hier nicht näher eingehen und verweisen deshalb nach der angedeuteten Richtung auf die trefflichen Originalschriften von den H.H. Weingarten⁽⁵⁴⁾, Bour⁽⁵⁵⁾, Bonnet⁽⁵⁶⁾, Codazzi⁽⁵⁷⁾, Jellet⁽⁵⁸⁾, Dini⁽⁵⁹⁾ u. A.; wir wenden uns nur noch zu den ganz besonderes Interesse darbietenden Flächen vom constanten Krümmungsmass $\pm a^2$.

Die Aufgabe, alle Flächen genannter Art zu finden, erheischt nach Minding die Integration der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \mp a^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\} = 0$$

oder nach Liouville die Integration von

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} \pm \frac{\lambda^2}{2a^2} = 0.$$

Diese Gleichung ist von Liouville⁽⁶⁰⁾ integrirt worden. Sind $\varphi(u)$ und

$\psi(v)$ zwei beliebige Funktionen, so ist das allgemeine Integral dieser partiellen Differenzialgleichung

$$\lambda = \frac{4a^2\varphi'(u)\psi'(v)c^{\varphi(u)+\psi(v)}}{\left\{1 \pm c^{\varphi(u)+\psi(u)}\right\}^2}.$$

wo $\varphi'(u)$ und $\psi'(v)$ die Ableitungen von $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ sind.

Minding⁽⁴⁵⁾ führt als einen speziellen Fall die Schraubenfläche

$$dz = \frac{H}{2\pi} d\psi \pm \frac{\sqrt{a^2(1-b^2) \pm r^2}}{a^2b^2 \mp r^2} - \frac{H^2}{4\pi^2 r^2} dr$$

an, worin H , a und b constante Grössen sind.

Für $H = 0$ folgt die Rotationsfläche

$$z = \int dr \frac{\sqrt{a^2(1-b^2) \pm r^2}}{a^2b^2 \mp r^2},$$

welche auch Liouville aus seinem Integral abgeleitet hat. Beschränkt man diese Gleichung auf eine bestimmte die Axe enthaltende Ebene, so bekommt man die hinzugehörige Meridiancurve.

Mit dem obern Zeichen erhalten wir die auf der Kugel abwickelbaren Flächen. Der Einfachheit halber nehmen wir $a^2 = +1$. Die Meridiancurve wird dann dargestellt durch

$$z = \int \frac{\sqrt{1-b^2+r^2}}{b^2-r^2} dr$$

Die Substitution $r = b \sin \varphi$ führt dieses Integral über in

$$z = \int \sqrt{1-b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

Der Minimalwerth für φ folgt aus $1 = b^2 \cos^2 \varphi_1$; letztere gibt $\sin \varphi_1 = \frac{1}{b} \sqrt{b^2 - 1}$.

Demnach kann r nie kleiner werden als $r_1 = b \sin \varphi_1 = \sqrt{b^2 - 1}$.

Diese Meridiancurve besteht nun genau genommen aus unzählig vielen congruenten Bogen, von denen die Betrachtung eines einzigen hinreicht. Ein solcher Bogen ist gegen die z Axe hohl, in seinen Endpunkten, wo $r = r_1$ ist, steht er

senkrecht auf der z Axe und wird dort von beiden Nachbarbogen berührt; in der Mitte, wo $r=b$, ist er mit z parallel; seine Gestalt bietet übrigens keine dem Anblick auffällige Umstände dar. Wird diese Fläche auf eine Kugel abgewickelt, so bedeckt sie eine von zwei gleichen Parallelkreisen begrenzte Zone, deren Breite sich nach dem Werth der Constanten b richtet.

Mit dem untern Zeichen und $b=0$ gibt das Minding'sche Integral für das Profil

$$z = \int dr \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{r^2} - \frac{H^2}{4\pi^2 r^2}}; \text{ daraus folgt:}$$

$$\left(r \frac{dz}{dr}\right)^2 = a^2 - r^2 - \frac{H^2}{4\pi^2} \quad \text{u.} \quad r^2 + \left(r \frac{dz}{dr}\right)^2 = a^2 - \frac{H^2}{4\pi^2} = \text{const.}$$

d. h. das Stück der Tangente des Profils zwischen dem Berührungspunkt und dem Schnitt mit der Rotationsaxe ist von der constanten Länge $\sqrt{a^2 - \frac{H^2}{4\pi^2}}$, wo H die Ganghöhe der Helicoide vorstellt⁽⁶¹⁾. Die Helicoiden, welche allen Werthen von H entsprechen, die zwischen 0 und $2\pi a$ liegen und deren Anzahl unendlich gross ist, haben alle dieselbe Krümmung $-\frac{1}{a^2}$ und sind alle applicabel auf derjenigen, für welche $H=0$ ist und dies ist die Liouville'sche Rotationsfläche

$$z = \int dr \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1}$$

Nimmt man $\frac{a}{r} = \cos \varphi$, so geht z über in $z = a(\varphi - \tan \varphi)$. Die Meridiancurve unter dem Namen Tractrix bekannt, besteht aus 2 congruenten Zweigen, die in der Entfernung a von der Axe sich so berühren, dass die gemeinschaftliche Tangente auf der Axe senkrecht steht; jeder Zweig hat die Eigenschaft, dass die Tangente zwischen dem Berührungspunkt und dem Schnitt mit der Axe die constante Länge a hat; derselbe nähert sich der Axe asymptotisch. Die Rotationsfläche, welche die Drehung erzeugt, kann versinnlicht werden durch ein kelchförmiges Champagnergläschen, dessen Stiel ins Unendliche verlängert ist⁽⁶²⁾.

Wählen wir nun b von 0 verschieden und $a^2=1$, so bekommen wir für Flächen mit der constanten Krümmung -1 die Gleichung:

$$dz = dr \sqrt{\frac{1-b^2-r^2}{b^2+r^2}} = dr \sqrt{\frac{1}{b^2+r^2} - 1}$$

Diese Formel soll nun weiter specialisirt werden. Für ein positives b setzen wir $r=b \sin \varphi$ und erhalten

$$z = \int \sqrt{1-b^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi, \text{ falls } b^2 < 1.$$

Der Meridian dieser Rotationsfläche besteht abermals aus unendlich vielen congruenten Bogen; jeder von ihnen wird von der Axe in 2 congruente entgegengesetzt liegende Theile zerlegt; in jedem der 2 von der Axe gleichweit abstehenden Endpunkte setzt sich berührend ein neuer Bogen an in der Weise, dass die gemeinschaftliche Tangente senkrecht zur Axe ist. — Für ein negatives b^2 setzen wir $r=b \cos \varphi$; dann wird

$$z = \int \sqrt{1-b^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

Auch hier besteht der Meridian aus unendlich vielen congruenten Bogen, welche der Axe die concave Seite zuwenden; die gemeinschaftlichen Tangenten bilden mit der Axe rechte Winkel, so dass die Rotationsfläche aus unendlich vielen auf einandergelegten Serviettenringen aufgebaut erscheint, die an den gemeinschaftlichen Kanten eine unendlich starke Krümmung besitzen.

Damit sind die Typen für die Flächen von constanter negativer Krümmung gewonnen. Die grosse Bedeutung, welche diese Flächen in neuerer Zeit für die Geometrie erlangt haben, soll im nächsten Kapitel des Nähern dargelegt werden.

V. Kapitel.

Das Krümmungsmass im Raum und sein Zusammenhang mit den geometrischen Axiomen.

Jede Fläche von constantem Krümmungsmass ist in sich selbst congruent d. h. jede auf ihr verzeichnete Figur lässt sich ohne Dehnung oder Zusammenziehung auf der Fläche verschieben und kann so, ohne aus der Fläche herausgetreten zu sein, mit einem congruenten Stück zur Deckung gebracht werden.

Biegt man eine Ebene, in welcher eine Gerade zwei beliebig gewählte Punkte verbindet, so geht im Allgemeinen aus der geraden Linie eine krumme hervor, die auch nach der Biegung noch den kürzesten Weg zwischen den beiden Punkten der neuen Fläche darstellt; die gerade Linie der Ebene ist zu einer geodätischen ihrer Biegungsform geworden. Da nun in der Ebene zwischen zwei Punkten nur eine einzige Gerade möglich ist und durch einen Punkt ausserhalb zu ihr nur eine Parallele existirt, so müssen diese Postulate von der Geraden und den Parallelen ohne Einschränkung auch für geodätische Linien der Flächen von constantem Krümmungsmass Null gelten und in Folge dieser Übereinstimmung lassen sich alle Sätze der Planimetrie sammt der ebenen Trigonometrie direkt auf alle abwickelbaren Flächen übertragen.

Betrachten wir nun eine Fläche von constantem positivem Krümmungsmass, so muss diese der Abwicklung auf eine Kugel fähig sein. Die Geometrie auf einer solchen Fläche erweist sich demnach identisch mit der schon längst bekannten Sphärik. Dabei bleibt das Congruenzaxiom wegen der Constanz des Krümmungsmasses bestehen und desshalb auch alle Sätze, welche die Planimetrie lediglich mittelst der Congruenz beweist. Anders verhält es sich aber mit dem Axiom der geodätischen Linie. Die geodätische Linie zwischen zwei Punkten auf der Kugel fällt bekanntlich mit einem Bogen des betreffenden Grosskreises zusammen; es liegt jedoch nach der analytischen Definition kein Grund vor, den grössern Bogen vor dem kleinern zu bevorzugen, so dass zwischen zwei Punkten analytisch zwei geodätische Linien möglich sind; liegen die Punkte gar in den Enden eines Durchmessers, so steigt die Anzahl der geodätischen Linien ins Unendliche. Einen weiteren charakteristischen Unterschied erblickt man leicht darin, dass auf einer Kugel kein einziger Grosskreis gezeichnet werden kann, der jedem andern nicht begegnen würde; mit andern Worten, es existiren auf der Kugel keine parallelen geodätischen Linien; desshalb fallen alle Theoreme der Planimetrie, welche mittelst des Axioms von den Parallelen bewiesen werden z. B. die Sätze über die Winkelsumme der Polygone, über die Ähnlichkeit der Figuren u. s. w. in der Sphärik weg. Die Kugel fordert also eine eigene Geometrie, deren Sätze und Formeln aber in diejenigen der Ebene übergehen müssen, wenn der Kugelradius ins Unendliche wächst, weil dann die sphärische Fläche zu einer ebenen wird.

Wie gestalten sich nun die geometrischen Verhältnisse auf einer Fläche

von constantem negativem Krümmungsmass? Das Axiom von der Verschiebbarkeit der Flächen in sich selbst hat jedenfalls Giltigkeit und die Untersuchung muss in erster Linie ihr Augenmerk darauf richten, ob zwei Punkte der Flächen zur Bestimmung einer geodätischen Linie hinreichen und ob zutreffenden Falles dieses Gesetz keine Ausnahmen gestattet wie auf der Kugel. Stellt sich bei der Analyse heraus, dass durch zwei Punkte ohne jede Einschränkung eine einzige Gerade fixirt wird, so besitzt die Geometrie dieser Flächen genau die gleiche Basis, auf welcher sich die nichteuklidische Planimetrie aufbaut, denn letztere verlangt bei ihren Beweisen bloss die Möglichkeit, jedes geometrische Gebilde ohne irgend welche Formveränderung in eine Lage überzuführen und zwischen zwei Punkten nur eine Gerade ziehen zu können. Sie lässt also das vielbestrittene XI. Axiom Euklids ganz fallen und macht die gegentheilige Voraussetzung, dass in einem Strahlenbüschel in Bezug auf eine nicht durch dessen Centrum gehende Gerade zwei verschiedene Strahlen enthalten sind, welche unter einem von $2 R$ abweichenden Winkel zusammenstossen und die betrachtete Gerade im Unendlichen schneiden, die eine links, die andere rechts. Sie heissen die beiden Parallelen. Jeder Strahl, welcher nach der Seite des letztern einen noch so kleinen Winkel mit einer der Parallelen bildet, muss erstere schneiden, während die im Winkel zwischen den Parallelen liegenden Strahlen sie nie treffen, selbst wenn sie ins Unendliche verlängert würden. Die Formeln dieser in sich widerspruchslosen Geometrie zeigen die nemliche Zusammensetzung wie jene der Sphärik und enthalten alle einen constanten Parameter, dessen wahre Bedeutung später klar hervortreten wird. Die trigonometrischen Functionen der Seiten werden durch die hyperbolischen ersetzt, während die Winkelfunctionen in beiden Geometrien übereinstimmen. Aus diesen Formeln gewinnt man die der Ebene, wenn man bei einem endlichen Werth des Parameters die Längen der Strecken äusserst klein annimmt oder für beliebige Strecken den Parameter unendlich gross voraussetzt. Die erstere Annahme ergibt die Folgerung, dass für unendlich kleine Figuren die euklidische Geometrie unabhängig vom Parallelaxiom Giltigkeit besitzt, die zweite hingegen gestattet die Auffassung der gewöhnlichen Geometrie als einen speciellen Fall der nichteuklidischen, indem wir den Parameter nur von solcher Grösse wählen, dass für unsere irdischen Messungen auf der Erde Näherungsformeln der nichteuklidischen Geometrie genügen.

Als in den dreissiger Jahren dieses neue geometrische System mit seinen scheinbar paradoxen Sätzen von Gauss ⁽⁶³⁾, Lobatschewsky ⁽⁶⁴⁾ und Bolyai ⁽⁶⁵⁾ aufgestellt wurde, fand dasselbe viel mehr Gegner als Anhänger; es wurde kurz ausgedrückt nicht verstanden und mit seinen Resultaten wusste man nichts anzufangen; nur wenige, wie Gauss und Dirichlet, mochten die Tragweite dieser Anfänge in ihrem vollen Umfang gewürdigt haben. Es lag hier eben ein Fall vor, analog denen, wie sie in der Mathematik häufig vorkommen, wo bei zahllosen Aufgaben durch ganz berechnete Prozesse imaginäre Grössen zum Vorschein kommen, die keiner Repräsentation fähig sind; hier löst sich die Anomalie durch die Thatsache, dass die Formeln, welche zu jenen Resultaten Anlass gegeben haben, umfassender sind, als die Bedeutung, welche ihnen unterlegt worden ist; sie weisen darauf hin, dass es einen umfassenderen Ausdruck der Aufgabe gibt, der die Fälle mit in sich begreift, welche unmöglich sind bei der beschränkteren, möglich aber bei der umfassenderen Auffassung der Dinge. Ähnlich verhält es sich, wie wir aus dem Folgenden ersehen werden, mit den Resultaten der nichteuklidischen Geometrie. Die mit dem Begriff der Ebene unvereinbar scheinenden Sätze erhalten erst ihre ebenso einfache als genügende Erklärung, wenn sie nicht auf die Ebene, sondern auf eine ganze Gattung von Flächen angewendet werden, von der die ebenen Flächen eine Species repräsentiren; nämlich auf die Flächen von constantem negativem Krümmungsmass.

Um die Theorie dieser Flächen hat sich der italienische Mathematiker H. BELTRAMI ⁽⁶⁶⁾ bedeutende Verdienste erworben. In seiner 1868 erschienenen *Saggio di interpretazione della geometria noneuclidea* führte er den Nachweis der Identität von der nichteuklidischen Geometrie mit der Geometrie auf den pseudosphärischen Flächen. Er zeigte, dass auf ihnen das Postulat, dass zwei Punkte eine einzige geodätische Linie bestimmen, keiner Ausnahme unterworfen sei. Die Formel für das Linienelement stellte sich als die gleiche heraus, wie die in den analogen Coordinaten ausgedrückte der nichteuklidischen Geometrie. Wird in einer solchen Fläche von einem Punkt auf eine geodätische Curve eine Senkrechte gefällt, so gibt es auf jeder Seite dieser Senkrechten von dem Punkt aus eine geodätische Linie, welche sich der gegebenen asymptotisch nähert; es sind die zwei „Parallelen“; der Winkel, den letztere unter einander bilden, ist von 0^0 und 180^0 verschieden. Jede geodätische Linie, welche innerhalb des von den zwei Parallelen gebildeten Winkels gezogen wird, schneidet die gegebene,

während jede ganz ausserhalb dieses Winkels liegende sie nicht trifft. Demnach müssen alle Sätze der nichteuklidischen Geometrie einer unmittelbaren Übertragung auf die pseudosphärischen Flächen fähig sein. Aus diesen Resultaten folgt ferner, dass all die vielen Bemühungen, das Parallelaxiom auf die zwei Eigenschaften einer Geraden in allen ihren Theilen congruent und durch zwei Punkte bestimmt zu sein, nothwendig scheitern mussten, denn beide Eigenschaften sind den geodätischen Linien der pseudosphärischen Fläche und der Geraden in der Ebene gemeinsam. Zur vollständigen Charakterisirung braucht man noch die Angabe des Werthes vom Krümmungsmass oder eines der beiden Sätze: durch einen Punkt gibt es zu einer geodätischen

$$\left. \begin{array}{l} \text{mehrere} \\ \text{eine einzige} \end{array} \right\} \text{Nichtschneidende.}$$

Die Formeln der pseudosphärischen Trigonometrie, welche zuerst von Minding⁽⁶⁵⁾ angegeben und 1857 von Codazzi bewiesen worden sind, gehen aus jenen der nichteuklidischen Geometrie hervor, wenn man den Parameter gleich der Quadratwurzel des Krümmungsmasses der betreffenden pseudosphärischen Fläche wählt, oder aus den sphärischen, wenn statt des Radius R das Produkt Ri gesetzt wird, was darauf hinauskommt, die Beziehungen der Winkel beizubehalten und an die Stelle der Kreisfunktionen der Seiten ihre hyperbolischen Funktionen zu setzen. Ein pseudosphärisches Dreieck ist durch seine drei Winkel bestimmt. Die Winkelsumme kann nie $2R$ erreichen; hätte sie in einem einzigen Dreieck diesen Werth, so würde dies auch in jedem andern zutreffen müssen und die zwei Parallelen, die es durch einen Punkt zu einer geodätischen Linie gibt, fielen dann stets zusammen. Hierin liegt offenbar eine Erweiterung und Berichtigung der berühmten Légendre'schen Untersuchungen über das Paralleltheorem. Ein weiteres charakteristisches Merkmal der pseudosphärischen Flächen ist der Satz, dass die Mittenlothe der Sehnen eines geodätischen Kreises sich immer im Centrum treffen, dass jedoch durch drei beliebig gewählte Punkte sich nicht immer ein Kreis legen lässt. — Wird auf einer solchen Fläche eine unbegrenzte kürzeste Gerade gezogen und auf ihren beiden Seiten in gleicher Entfernung zwei Distanzlinien, so lässt sich der dazwischen liegende unendlich lange Streifen unendlich oft so auf der früher beschriebenen Ringfläche aufrollen, dass die Mittellinie auf den Kehlkreis, die zwei Distanzlinien auf zwei gleiche Parallelkreise zu liegen kommen. Die Breite der bedeckten Zone richtet sich nach der Grösse des

Radius vom Kehlkreis und steht zu diesem im umgekehrten Verhältniss. Dabei ist zu bemerken; dass zur Aufrechthaltung des Postulats von der kürzesten Linie die über einander lagernden Punkte immer als verschieden betrachtet werden müssen und die Fläche selbst als Schraubenfläche mit unendlich kleinem Gewinde aufzufassen ist. — Ein auf der Fläche gezeichneter Kreis mit unendlich grossem Radius theilt sie in zwei Stücke, von welchen sich jedes unendlich oft um die Kelchfläche in der Art legen lässt, dass der construirte Kreis zum begrenzenden Parallelkreis wird, mit welchem dann die Rotationsfläche senkrecht zur Axe abschliesst.

An diese Beltrami'sche Arbeit reihen sich im engen Anschluss die geistreichen Untersuchungen der HH. FELIX KLEIN ⁽⁶⁸⁾ und von ESCHERICH ⁽⁶⁹⁾. Nach Klein ist die Projectivität eine vom Parallelaxiom unabhängige Eigenschaft; sie gilt daher, wie H. v. Escherich näher ausgeführt hat, auch für die Flächen von constantem negativem Krümmungsmass. Sämmtliche Sätze über projectivische und perspectivische Gebilde gestatten eine unmittelbare Übertragung auf kürzeste Linien der pseudosphärischen Flächen. Durch passende Wahl der Coordinaten lässt sich ferner jede kürzeste Linie in linearer Form durch zwei Variabele x und y darstellen. Jede Gleichung $f(x,y) = 0$ repräsentirt eine Curve auf der Fläche und diese Curven können mit Rücksicht auf ihre Gleichungen in dieselben Klassen eingetheilt werden wie die ebenen; man darf also insbesondere von Curven zweiter Klasse reden; für sie gelten alle Sätze über die Kegelschnitte, welche nur aus ihrer projectivischen Erzeugungsart abgeleitet sind, ebenso besitzen sie die allgemeinen Polareigenschaften der Kegelschnitte. Leicht entwickelbar ist ferner die Lehre von der Collineation und Reciprocität; die Transversalensätze behalten ebenfalls ihre Gültigkeit; die Sätze über Ähnlichkeitspunkte u. s. w. sind leicht modificirbar, so dass selbst das Appollonianische Problem auf die pseudosphärischen Flächen übertragen werden kann.

Auf das Wesen der bisher genannten drei verschiedenen Geometrieen führt auch die allgemeine projectivische Massbestimmung von Cayley ⁽⁷⁰⁾, ohne dass es dabei nothwendig ist, aus der Ebene herauszutreten.

Wird in der Ebene ein unendlich ferner, reeller oder imaginärer Kegelschnitt angenommen, dessen Gleichung in homogenen Coordinaten

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

sein soll, so lässt sich der Abstand d zweier fester Punkte $P(x_1, x_2, x_3)$ und $P_1(y_1, y_2, y_3)$ in der Ebene darstellen durch den mit einer gewissen Constanten multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches durch die zwei Punkte P und P_1 und durch die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie PP_1 mit dem Kegelschnitt bestimmt ist. Bedeutete Φ_x und Φ_y die Ausdrücke, in welche sich $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ verwandelt, wenn für ξ, η, ζ respective die Coordinaten von P und P_1 gesetzt werden und bestimmt sich Φ_{xy} durch die Relation:

$$2\Phi_{xz} = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \Phi_x}{\partial y_2} y_2 + \frac{\partial \Phi_x}{\partial x_3} y_3,$$

$$\text{so ist } d = C \cdot \log \frac{\Phi_{xy} + \sqrt{\Phi_{xy}^2 - \Phi_x \cdot \Phi_y}}{\Phi_{xy} - \sqrt{\Phi_{xy}^2 - \Phi_x \cdot \Phi_y}}$$

Der Fundamentalkegelschnitt kann nun imaginär oder reell oder in ein gewisses Punktpaar degenerirt sein. Diese drei Möglichkeiten müssen getrennt behandelt werden.

1. Der Fundamentalkegelschnitt ist imaginär. Alsdann hat man nach H. Klein ⁽⁶⁸⁾ die sogenannte elliptische Geometrie, welche sich mit der Geometrie der Flächen von constanter positiver Krümmung deckt.

2. Der Fundamentalkegelschnitt kann in das Paar der imaginären Kreispunkte degeneriren; alsdann ist die Constante C unendlich gross zu nehmen und aus der sodann folgenden Proportion

$$\Phi_x : \Phi_{xy} = \Phi_{xy} : \Phi_y$$

ergibt sich unmittelbar, dass der obige Wurzel Ausdruck sich annullirt. Dann ist

$$\lambda = C \cdot \log 1 = \infty \cdot 0 = \text{const.}$$

d. h. man hat die gewöhnliche euklidische Massbestimmung. Aus diesem Grunde nennt H. Klein die euklidische Geometrie die parabolische Geometrie.

3. Der Fundamentalkegelschnitt ist reell. Dann hat man die sogenannte hyperbolische Geometrie, deren Identität mit der nichteuklidischen H. Klein ebenfalls nachgewiesen hat; so dass sich das wichtige Resultat aussprechen lässt:

Die nichteuklidische Geometrie, die pseudosphärische und die hyperbolische Geometrie sind wesentlich ein und dasselbe ⁽⁷¹⁾.

Hiezu möge noch gelegentlich bemerkt werden, dass sich eine ganze Reihe von planimetrischen Sätzen auf begrenzte Gebiete jeder beliebig gestalteten Fläche übertragen lässt mit der Modifikation, dass statt gerade Linie geodätische gesetzt wird, wie dies H. BÖKLEN ⁽⁷²⁾ an mehreren Orten ausgeführt hat. Eine allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke hat H. CHRISTOFFEL ⁽⁷³⁾ aufgestellt; es gelang ihm, Formeln herzuleiten, mittelst denen aus drei gegebenen Bestimmungstücken eines jeden geodätischen Dreiecks die drei übrigen unbekannten Stücke jederzeit berechnet werden können.

Nach diesen Erörterungen über die Stellung des Parallelaxioms zu den übrigen geometrischen Axiomen wenden wir uns zu den allgemeinen Voraussetzungen, die der euklidischen Geometrie zu Grunde liegen.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes als auch die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raum als etwas gegebenes voraus. Die wesentlichen Bestimmungen gibt sie in der Form von Axiomen d. h. von Sätzen, welche nicht beweisbar sind, deren Richtigkeit aber von jedem zugegeben werden muss, welcher den Sinn derselben aufzufassen vermag. Die Grundbegriffe der Raumconstructionen werden durch Definitionen entwickelt, welche die Raumvorstellung und damit die Axiome dieser Raumvorstellung zur gegebenen Voraussetzung haben; es sind nur zweckmässig gewählte Abstractionen aus der Raumvorstellung, deren Bedeutung darauf beruht, dass sie zu fruchtbarer Entwicklung der Geometrie besonders geeignet und zur sicheren und umfassenden Anwendung das raumerfüllende Material befähigt sind ⁽⁷⁴⁾.

Das Wesen der Geometrie besteht nun in nichts anderem als in der constructiven Übertragung dieser Elemente auf immer complicirtere Raumformen. Schluss wird aus Schluss entwickelt und so das ganze systematische Lehrgebäude geometrischer Wissenschaft aufgerichtet. Seit den ältesten Zeiten sind die Sätze der Geometrie auf die uns umgebende Wirklichkeit angewendet worden und kein einziger Fall liegt vor, dass die Theorie mit der Erfahrung in Widerspruch gerathen wäre. Wenn daraus ohne Zweifel der Rückschluss gestattet ist, dass keines der grundlegenden Merkmale des Raumes falsch bestimmt oder völlig unbeachtet geblieben ist, so blieb immerhin noch eine Frage

von durchgreifender Wichtigkeit unentschieden, nämlich die nach dem systematischen Zusammenhang der Axiome Euklids. Man sieht nämlich ohne Weiteres durchaus nicht ein, ob die euklidischen Axiome das nothwendige und hinreichende System der Axiome darstellen, ob nicht manche einfachere Anschauungsverhältnisse, eben weil sie sich der geometrischen Betrachtung als selbstverständlich aufdrängen, übergangen worden sind; ebenso wenig ist klar, ob jene Axiome in der That Axiome vorstellen, ob sie wirklich einen Beweis weder brauchen noch ertragen. Das Dunkel über das Verhältniss dieser Voraussetzungen wurde bis in unsere Zeit herein weder von Philosophen noch von Mathematikern gehoben. Der Grund lag noch bei all diesen Untersuchungen wohl darin, dass sich dabei mit den logischen Begriffsentwicklungen gar zu leicht Ergebnisse der täglichen Erfahrung als Denknothwendigkeiten vermischten, so lange die einzige Methode der Geometrie die von Euklides gelehrt Methode der Anschauungsweise war. Namentlich war es auf diesem Weg ausserordentlich schwer, sich überall klar zu machen, ob man in den Schritten, die man der Beweisführung nach einander vorschrieb, nicht willkürlich und unwissentlich allgemeinste Ergebnisse der Erfahrung zu Hilfe nahm, welche die Ausführbarkeit gewisser vorgeschriebener Theile des Verfahrens uns schon praktisch gelehrt haben.

Nun gibt es aber noch einen zweiten Weg zur wissenschaftlichen Behandlung der Geometrie. Alle unsere Raumverhältnisse wie die Ausgedehtheit nach drei Dimensionen, die Continuität, die Congruenz in sich selbst etc. sind messbar d. h. sie können auf die Bestimmung von Grössen wie Linien und Winkel zurückgeführt werden. Desshalb lassen sich die Aufgaben der Geometrie auch dadurch lösen, dass man die Rechnungsmethoden aufsucht, mittelst deren man die unbekannten Raumgrössen aus den bekannten herleitet. Dies geschieht in der analytischen Geometrie. Zur Beurtheilung der obigen Fragen kann man daher auch von der Seite des Raumbegriffs ausgehen, dass man die Lage eines Punktes im Raum in Bezug auf irgend ein festes Coordinatensystem durch Messung irgend welcher Grössen bestimmt und dann zusieht, welche besondere Bestimmungen unserm Raum zukommen und ob solche vorhanden sind, durch welche er sich von andern mehrfach ausgedehnten und continuirlichen Grössen unterscheidet. Dieser Weg ist zuerst von RIEMANN ⁽⁷⁵⁾

eingeschlagen worden in seiner erst 1867 veröffentlichten klassischen Arbeit „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.“

Riemann beginnt damit, dass er den allgemeinen Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchen auch die Raumgrössen enthalten sind, aus den allgemeinen Grössen begriffen entwickelt. Nach dem Ausdruck, welchen Gauss in seiner Anzeige zur zweiten Abhandlung über die Theorie der biquadratischen Reste in die Wissenschaft eingeführt hat, bilden nemlich Objekte, die in eine einzige Reihe angeordnet sind, in der es nur ein Vorwärts und Rückwärts gibt, eine Mannigfaltigkeit von einer Dimension ⁽⁷⁰⁾; Objekte, welche in Reihen von Reihen geordnet sind, eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen und Objekte, bei deren Anordnung der angedeutete Process des Herstellens von Reihen n mal wiederholt ist, eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen, die auch eine n fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit genannt wird. So bilden die ganzzahligen Werthe einer Variabeln x , eine einfach ausgedehnte, die Verbindungen der ganzzahligen Werthe von n Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ eine n fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. In dieser bildet die Gesammtheit der Werthverbindungen, die nur in Bezug auf eine einzige Variabele abweichen, eine einfach ausgedehnte, jene, welche nur bezüglich derselben zwei Variabeln differiren, eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit u. s. w. Mithin sind in der Mannigfaltigkeit von n Dimensionen Mannigfaltigkeiten von allen niedrigeren Ordnungen enthalten. — An den obigen Festsetzungen ist nichts Wesentliches zu ändern, falls vorgeschrieben wird, dass die Variabeln statt gleich ganzzahligen Werthen gleich beliebigen Vielfachen eines aliquoten Theiles der Einheit sein sollen, denn dies involvirt nur die Einführung einer neuen kleinern Einheit. Die einzelnen Werthe werden discrete oder unstetige genannt und die aus denselben entnommenen Verbindungen constituiren eine discrete Mannigfaltigkeit. Jeder einzelne Werth der Mannigfaltigkeit, Riemann heisst ihn Element, wird durch die Angabe der discreten Werthe von den n Variabeln festgestellt. — Kann dagegen jede Variabele innerhalb eines bestimmten Intervalls jeden beliebigen Werth annehmen, der gleich einem beliebigen Vielfachen irgend eines Theils der Einheit oder gleich einer beliebigen rationalen Grösse ist, so heisst sie innerhalb des angedeuteten Intervalls stetig. Auf die innerhalb dieses Intervalls unmittelbar auf einander folgenden unendlich vielen Werthen lässt sich nun ebenfalls der Ausdruck der Mannigfaltigkeit übertragen; sie bilden eine stetige

Mannigfaltigkeit von einer Dimension. In gleicher Weise gibt der Inbegriff aller innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossenen Werthverbindungen von n Variablen eine n fach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit. Jede einzelne Werthverbindung, der Punkt, wird durch die n unter sich unabhängigen und stetigen Veränderlichen innerhalb der Mannigfaltigkeit fixirt. Auch ist leicht ersichtlich, dass in der letztern stetige Mannigfaltigkeiten von allen niedrigeren Ordnungen enthalten sein müssen. Unsere räumliche Anschauung bietet in der Linie ein Bild für eine einfach ausgedehnte, in der Fläche für eine zweifach ausgedehnte und im Raum für eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Eine ähnlich dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist auch das System der Farben, in so fern als jede Farbe dargestellt werden kann als Funktion des Farbentons, des Sättigungsgrades und der Lichtstärke oder als die Mischung von drei Grundfarben, wozu am besten Violett, Grün und Roth geeignet sind. Jede Farbe kann durch alle möglichen Zwischenfarben in jede andere übergeführt werden; das Farbensystem ist demnach ähnlich dem Raum eine stetige Mannigfaltigkeit dritter Ordnung; doch lassen sich zwischen beiden Begriffen wesentliche Differenzen aufstellen. Im Raum kann der Abstand von zwei über einander liegenden Punkten verglichen werden mit der Entfernung zweier Punkte auf einer horizontalen Geraden. Etwas Analoges findet im System der Farben nicht statt. Die Differenz von zwei Farben von gleichem Ton und Sättigungsgrad aber verschiedener Lichtstärke lässt sich nicht vergleichen mit der Differenz zweier Farben von gleichem Sättigungsgrad und gleicher Lichtstärke aber verschiedenen Tönen. Ferner ist unser Raum ins Unendliche ausgedehnt, das Farbensystem dagegen an endliche Grenzen gebunden, weil keine der obigen drei unabhängigen Veränderlichen ins Unendliche zu variiren vermag. — Ebenso könnte nach H. HELMHOLTZ ⁽⁶⁰⁾ das Reich der einfachen Töne als eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen betrachtet werden, wenn sie nur nach Tonhöhe und Tonstärke verschieden angenommen und die Unterschiede in der Klangfarbe bei Seite gelassen werden. Auch diese Mannigfaltigkeit ist begrenzt und gestattet keine Vertauschung der Dimensionen, denn der Abstand von zwei Tönen gleicher Höhe und verschiedener Intensität lässt sich in keine Beziehung bringen zum Abstand zweier Töne von gleicher Intensität und anderer Höhe. — Der Raum, die Systeme der Farben und Töne sind folglich Begriffe, welche sich unter dem

allgemeinen Gattungsbegriff einer n fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit subsumiren lassen, solange über die gegenseitige Abhängigkeit seiner n Dimensionen keine besonderen Bestimmungen getroffen sind.

Zur Untersuchung der unserm Raum analogen Mannigfaltigkeiten reicht es hin, sich auf solche Mannigfaltigkeiten zu beschränken, denen das Merkmal der Gleichartigkeit der Dimensionen zukommt, also auf Räume von n Dimensionen. — Solche Räume von gleicher Dimensionszahl, also von den nämlichen Ausdehnungsverhältnissen, werden sich immerhin noch unendlich viele denken lassen. Zur Ableitung der verschiedenen möglichen Arten verwendet Riemann die innern Massverhältnisse d. h. die Beziehungen, welche dem Vergleichen der einzelnen Theile der Mannigfaltigkeit zu Grunde liegen. Dieses Vergleichen geschieht bei discreten Grössen durch Zählung, bei den stetigen durch Messung. Das Messen besteht in einem Aufeinanderlegen der zu vergleichenden Grössen; zum Messen wird also gefordert, dass eine Grösse als Massstab für die andere fortgetragen werden kann; sollen also Massbestimmungen möglich sein, so müssen die Grössen eine vom Ort unabhängige Lage besitzen, was in mehr als einer Weise stattfinden kann.

Es werden nun in solchen Mannigfaltigkeiten auch die in der Geometrie üblichen Bezeichnungen angewendet. Das Einzelne, der Punkt, wird durch n von einander unabhängigen Messungen bestimmt; die dabei erhaltenen Masszahlen heissen die Coordinaten des Punktes. Analytisch ist derselbe durch n Gleichungen bestimmt, welche im Spezialfall die Form

$$x_1 = a_1; \quad x_2 = a_2 \quad . \quad . \quad . \quad x_n = a_n$$

annehmen. Sind zwischen den Coordinaten $n-1$ Gleichungen gegeben, so ist nur eine Variable willkürlich; das aus der n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ausgeschiedene Gebilde wird eine Linie genannt; ebenso bestimmen $n-2$ Gleichungen eine Fläche u. s. w.

Riemann verfolgt nun die zunächst sich darbietende Annahme, dass die Länge des Linienelements unabhängig von der Lage sei, also jede Linie durch jede andere gemessen werden könne und sucht für die Länge des Linienelements einen mathematischen Ausdruck zu gewinnen. Er löst dabei die Aufgabe unter zwei Einschränkungen; einmal beschränkt er sich auf solche Linien, in welchen das Verhältniss der Coordinaten x_i eines Punktes und deren Diffe-

renzialien dx_i sich stetig ändern und zweitens nimmt er an, dass die Länge des Linienelements ds , von Grössen zweiter Ordnung abgesehen, ungeändert bleibt, wenn sämtliche Punkte die nämliche unendlich kleine Ortsveränderung erleiden, worin zugleich enthalten ist, dass, wenn sämtliche Grössen dx_i in demselben Verhältniss wachsen, das Linienelement sich ebenfalls in diesem Verhältniss ändert. Er wählt dann für das Linienelement einen Ausdruck von der Form

$$I) ds = \sqrt{A_{11}dx_1^2 + \dots + A_{nn}dx_n^2 + 2A_{12}dx_1dx_2 + \dots + 2A_{n-1n}dx_{n-1}dx_n},$$

denn diese Annahme erweist sich als die einfachste, welche den vorigen Bedingungen entspricht. Riemann anerkennt sie aber ausdrücklich als Hypothese und erwähnt insbesondere die Möglichkeit, dass für das Linienelement an Stelle der Quadratwurzel aus dem homogenen Ausdruck zweiten Grades auch die vierte Wurzel aus einem Ausdruck vierten Grades gesetzt werden könnte.

Jener quadratische Ausdruck für das Linienelement enthält $\frac{n(n+1)}{2}$ Coefficienten A_{ik} , welche Funktionen der Coordinaten x_i sind; man wird daher den Ausdruck in einen neuen homogenen

$$II) ds = \sqrt{\alpha_{11}dy_1^2 + \dots + \alpha_{nn}dy_n^2}$$

transformiren können, dadurch dass man für die n Coordinaten Funktionen

$$x_1 = \varphi_1(y_1 \dots y_n); \quad x_2 = \varphi_2(y_1 \dots y_n); \quad \dots \quad x_n = \varphi_n(y_1 \dots y_n)$$

von neuen Coordinaten $y_1 \dots y_n$ setzt. Stellen nun umgekehrt die Formeln I und II das nämliche Linienelement vor, so muss eine Transformation aus der ersten Form in die zweite möglich sein; setzt man $y_1 \dots y_n$ als irgend welche Funktionen von $x_1 \dots x_n$ voraus, so erkennt man die theoretische Möglichkeit, nur n der Coefficienten A_{ik} in die Form α_{ik} überzuführen; die $\frac{n(n-1)}{2}$ ändern würden also im Allgemeinen andere als die gegebenen Formen annehmen, wenn sie nicht schon durch die Natur der Mannigfaltigkeit als gleichwerthig bestimmt würden. Es muss daraus der Schluss gezogen werden, dass zur Bestimmung der innern Massverhältnisse nur $\frac{n(n-1)}{2}$ Funktionen des Ortes erforderlich seien.

Legt man durch einen Punkt der Mannigfaltigkeit ein beliebiges Flächenelement, das durch $n-2$ lineare Gleichungen der Coordinaten bestimmt ist, so sind in diesem die Anfangsrichtungen einer Schaar kürzester Linien enthalten; die Verlängerungen der durch diese Anfangsrichtungen bestimmten kürzesten Linien liefern eine Fläche, der nach der Gauss'schen Bezeichnungsweise in dem gegebenen Punkt ein gewisses Krümmungsmass angehört, dessen Werth nur vom Ort und der Richtung des Flächenelements abhängig ist. Dieses Krümmungsmass hat, wie die Analysis ergibt, in allen Flächenrichtungen den Werth null in allen besondern Mannigfaltigkeiten, für welche der Ausdruck des Linienelements die einfache Form Σdx^2 annimmt; solche Mannigfaltigkeiten heisst Riemann mit Rücksicht auf unsere Ebene und unsern Raum „ebene“. Da zur Bestimmung der innern Massverhältnisse unter den früheren Beschränkungen $\frac{n(n-1)}{2}$ Funktionen des Ortes gefordert werden, so müssen sich die innern Massverhältnisse bestimmen lassen, sobald für jeden Punkt das Krümmungsmass in $\frac{n(n-1)}{2}$ Flächenrichtungen bekannt ist, vorausgesetzt, dass diese Grössen in keiner Abhängigkeit zu einander stehen.

Die ebenen Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass allenthalben gleich null ist, lassen sich als ein besonderer Fall derjenigen Mannigfaltigkeiten ansehen, deren Krümmungsmass überall constanten Werth besitzt. Der gemeinsame Charakter derselben kann dann auch so ausgesprochen werden, dass sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung und Zusammenziehung bewegen lassen; denn offenbar würden endliche Raumgebilde nicht überall hin verschiebbar und in jeder Richtung drehbar sein, wenn nicht in jedem Punkt nach allen Richtungen das Krümmungsmass dasselbe wäre. Durch das Krümmungsmass sind die innern Massverhältnisse der Mannigfaltigkeit vollständig bestimmt; es sind daher um einen Punkt nach allen Richtungen die Massverhältnisse genau dieselben wie um einen andern und also von ihm aus die nämlichen Constructionen ausführbar; demnach kann in den Mannigfaltigkeiten von constantem Krümmungsmass den Körpern jede beliebige Lage gegeben werden. Die Massverhältnisse dieser Mannigfaltigkeiten hängen also nur vom Werth des Krümmungsmasses ab. Nimmt man nun einen Raum von drei Dimensionen, welcher in allen Punkten das Krümmungsmass null hat, so besitzt derselbe

ganz die gleichen Attribute, welche die euklidische Geometrie unserem Raum beilegt. Zur Bestimmung seiner Massverhältnisse ist also nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die Winkelsumme im Dreieck überall gleich zwei Rechten ist, was durch die Messungen der grössten Dreiecke am Himmel täglich bestätigt wird.

Im Gegensatz zu diesem ebenen euklidischen Raum könnten die übrigen Räume von constanter Krümmung etwa gekrümmte genannt werden. Es ist das Verdienst von H. BELTRAMI⁽⁷⁷⁾, die charakteristischen Merkmale solcher Räume auf analytischem Weg ermittelt zu haben. Seine darauf bezügliche äusserst lehrreiche Abhandlung trägt den Titel: „Fundamentale Theorie der Räume constanter negativer Krümmung“; sie stützt sich auf die oben angeführten Voraussetzungen Riemanns und bildet zur Riemannschen Arbeit eine sehr werthvolle Ergänzung. Die Räume constanter negativer Krümmung bezeichnet Beltrami als „pseudosphärische“. Kommt einem solchen von n Dimensionen die constante Krümmung $-\frac{1}{R^2}$ zu, so kann der Werth des Linienelementes ds in der Form

$$ds = R \cdot \frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{x}$$

dargestellt werden; dabei sind x_i und $x_i + dx_i$ die Coordinaten der Endpunkte a repräsentirt eine constante Grösse und die Grösse x hängt mit den übrigen durch die Relation

$$a^2 = x^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$$

zusammen.

Jede kürzeste Linie wird durch $(n-1)$ lineare Gleichungen zwischen den n Coordinaten x_i ausgedrückt; die Entfernung ρ der Punkte $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ und $x_1, x_2, \dots, x_n$ gibt die Formel

$$\cos \frac{\rho}{R} = \frac{a^2 - x_1^0 x - x_2^0 x_2 - \dots - x_n^0 x_n}{\sqrt{a^2 - x_1^{02} - \dots - x_n^{02}} \sqrt{a^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2}};$$

woraus folgt, dass ein derartiger pseudosphärischer Raum sich bis ins Unendliche erstreckt. — Jeden beliebigen Theil davon kann man an einen andern Ort überführen und daselbst mit einem correspondirenden Raumtheil zur Deckung

bringen, d. h. der pseudosphärische Raum ist in sich selbst congruent. — Die Gesammtheit von $n-m$ linearen Gleichungen zwischen den n Coordinaten x_i stellt einen Raum von m Dimensionen dar, dessen Krümmung ebenfalls constant und gleich $-\frac{1}{R^2}$ ist. So repräsentiren beispielsweise $n-2$ lineare Gleichungen eine Fläche constanter Krümmung; wir heissen sie eine ebene Fläche; $n-3$ Gleichungen liefern einen Raum von drei Dimensionen und der constanten Krümmung $-\frac{1}{R^2}$ u. s. f.

Ohne jegliche Ausnahme bestimmen zwei Punkte im pseudosphärischen Raum eine einzige Kürzeste und drei Punkte eine einzige ebene Fläche. Die geodätische Curve, welche zwei Punkte einer solchen Fläche verbindet, gehört ganz der Fläche an, so dass ein geodätisches Dreieck immer auf einer ebenen Fläche liegt. Zwei der letzteren haben als Schnittcurve nothwendig eine Kürzeste. — Durch jeden Punkt existiren zu einer kürzesten Linie zwei Parallele im früher definirten Sinn. Die Trigonometrie ist identisch mit der, welche bei den pseudosphärischen Flächen aufgestellt worden ist. Wählt man speziell Räume von drei Dimensionen, so gestaltet sich die Geometrie derselben genau so wie die nichteuklidische Stereometrie; nur treten an Stelle von Geraden und Ebenen die kürzesten Linien und ebenen Flächen. Die Kugel muss ersetzt werden durch eine geodätische d. h. durch eine Fläche, welche sämmtliche von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien orthogonal schneidet. Alle Conceptionen der nichteuklidischen Geometrie finden eine vollständige Correspondenz in der Geometrie der pseudosphärischen Räume; nur ist dabei zu beachten, dass während die Sätze der Planimetrie einer wahren Interpretation fähig sind, weil sie auf einer reellen Fläche dargestellt werden können, die Sätze der Stereometrie sich nur analytisch deuten lassen, weil der Raum, welcher eine solche Repräsentation zuliesse, von dem abweicht, was wir gewöhnlich unter dem Ausdruck „Raum“ verstehen.

Von H. Beltrami fahren wir nun weiter, wie man einen dreidimensionalen pseudosphärischen Raum in einer Kugel unseres euklidischen Raumes abbilden könne. Durch das von H. Beltrami angegebene Verfahren wird jede geodätische Linie durch eine gerade, jede ebene Fläche durch eine Ebene in der Kugel dargestellt. Den unendlich entfernten Punkten des pseudosphärischen Raumes entsprechen die Punkte der Kugeloberfläche, so dass zwei Parallele im Raum

mit zwei sich auf der Kugel schneidenden Geraden correspondiren, während zwei sich ausserhalb derselben begegnende Gerade das Bild zweier sogenannter „nichtscheidender Kürzesten“ des Raumes sind. Bei dieser Darstellung erscheinen die verschiedenen Theile im Kugelbild um so mehr verkleinert, so näher sie sich der Oberfläche befinden und zwar ist die Reduction in der Richtung der Kugelradien stärker als in der dazu senkrechten Richtung.

Ein Beobachter, dessen Augenmass und Raumerfahrung sich in unserem euklidischen Raum ausgebildet haben, würde beim Eintritt in einen pseudosphärischen Raum von drei Dimensionen die Visirlinien seines Auges auch noch als gerade Linien ansehen und die Welt um ihn herum würde ihm denselben Eindruck hervorrufen als befände er sich im Mittelpunkt des Beltrami'schen Kugelbildes. Die entferntesten Gegenstände würden ihm in endlicher Entfernung erscheinen; gieng er aber auf sie zu, so würden sie sich vor ihm dehnen und hinter ihm zusammenziehen. Zwei kürzeste Linien, die nach einem und demselben Punkt des Hintergrundes convergiren, wo ihm die Welt als geschlossen erscheint, würden dies für den Beobachter immer thun, wie weit er auch gieng; er würde ihren Schnittpunkt nie erreichen. Sähe er zwei Kürzeste, welche sich ausserhalb der Grenzfläche zu begegnen scheinen, so würde er, ihnen nachgehend, erkennen, dass sie immer mehr auseinanderücken, je weiter er ihnen entlang geht, während hinter ihm ihr Abstand immer mehr und mehr schwindet⁽⁶²⁾.

Aus den Formeln für den n dimensionalen pseudosphärischen Raum entspringen die analogen für den Raum von constanter positiver Krümmung, wenn die Grössen R , a und x mit dem Faktor $\sqrt{-1}$ versehen werden. Sind also $x_1, x_2, \dots, x_n$ die n Coordinaten eines Punktes im „sphärischen“ Raum und

$$x^2 = a^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

so gewinnt der Ausdruck für das Linienelement die Form

$$ds = R \cdot \frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 - dx^2}}{x};$$

die Entfernung ρ von den zwei Punkten $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ und $x_1, x_2, \dots, x_n$ wird angegeben durch:

$$\cos \frac{\rho}{R} = \frac{a^2 + x_1^0 x_1 + x_2^0 x_2 + \dots + x_n^0 x_n}{\sqrt{a^2 + x_1^{0^2} + \dots + x_n^{0^2}} \sqrt{a^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2}}$$

In diesem Ausdruck können die Coordinaten zwischen den beiden Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ variiren; der Werth von ρ bleibt dabei immer endlich d. h. der sphärische Raum ist zwar wie eine Kugel unbegrenzt, aber keineswegs unendlich gross. Auch in ihm können die räumlichen Gebilde ohne Formveränderung beliebig bewegt werden. Die geodätische Linie bestimmt sich auch noch durch $(n-1)$ lineare Gleichungen zwischen den n Coordinaten, aber zwei Punkte fixiren, wie die Analysis zeigt, nicht ausnahmslos eine einzige kürzeste Linie. Die kürzesten Linien kehren alle in sich zurück und parallele gibt es überhaupt keine. — Der Raum von constanter positiver Krümmung ist, wie H. Beltrami am Schluss seiner Arbeit nachweist, in dem um eine Dimension höhern Raum von constanter negativer Krümmung enthalten. Der n dimensionale Raum von der constanten Krümmung $-\frac{1}{R^2}$ enthält z. B. sphärische Räume von $n-1$ Dimensionen und der constanten positiven Krümmung

$$\frac{1}{\left(R \sin \frac{\rho}{R}\right)^2},$$

wo ρ eine beliebige Constante ist.

Wählen wir die Dimensionszahl $n=3$, so bestimmen in diesem sphärischen Raum drei Punkte, im Allgemeinen eine Kugelfläche, auf welche unsere sphärische Geometrie und Trigonometrie ohne Weiteres übertragen werden kann. Die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck des dreidimensionalen Raumes übersteigt demnach den Werth von zwei Rechten. — Stellen wir uns vor, ein Beobachter könnte mit seinem im euklidischen Raum geschulten Augennass in den sphärischen Raum eintreten, so würde er merkwürdigen Täuschungen unterworfen sein. Entferntere Gegenstände würde er für entfernter und grösser halten als sie in der That sind, und auf sie zugehend würde er sie bald erreichen, als er nach dem Gesichtsbilde annehmen musste. Ferner würde er Gegenstände vor sich sehen, welche er nur mit divergenten Gesichtslinien fixiren könnte, dies würde bei allen denjenigen Körpern der Fall sein, welche weiter als ein Quadrant eines Grosskreises von seinem Standpunkt ent-

fernt sind. Alle Gesichtslinien müssten, soweit sie zwischen andern Gegenständen frei hindurchgehen können, wieder zusammenlaufen⁽⁶⁷⁾.

An dieser Stelle möge nur noch erwähnt werden, dass auch die Gesetze der Mechanik sich ohne Widerspruch auf die sphärischen und pseudosphärischen Räume übertragen lassen. Schon DIRICHLET⁽⁷⁸⁾ hatte dieses Gebiet betreten; er untersuchte, wie sich die Theorie der Anziehung im nichteuklidischen Raum gestaltet, hat aber darüber leider nichts veröffentlicht. H. SCHERING lieferte eine Abhandlung über die Schwerkraft in diesem Raum und H. Lipschitz⁽⁷⁹⁾ hat das Grundgesetz der ganzen Dynamik, das Hamilton'sche Princip, auf Räume constanter Krümmung übertragen.

Während Riemann bei seinen auf die Grundlagen der Geometrie bezüglichen Untersuchungen von den allgemeinsten Grundfragen der analytischen Geometrie ausgieng, war H. HELMHOLTZ⁽⁸⁰⁾ theils durch Untersuchungen über die räumliche Darstellung der Farben, theils durch Untersuchungen über den Ursprung unseres Augenmasses für Abmessungen im Gesichtsfelde zu ähnlichen Betrachtungen gekommen wie Riemann. Während letzterer von dem allgemeinen Ausdruck für das Linienelement ausgieng und daraus die Bedingungen für die freie Beweglichkeit fester Raumgebilde herleitete, ist H. Helmholtz von der Thatsache der Beobachtung ausgegangen, dass in unserem Raum die Bewegung fester Körper mit demjenigen Grad von Freiheit möglich ist, welche die euklidische Geometrie fordert. Aus dieser Thatsache hat dann H. Helmholtz die Nothwendigkeit des Ausdrucks für das Linienelement abgeleitet, den Riemann als Axiom hingestellt hat. Die Helmholtz'schen Untersuchungen ergänzen demnach die Riemann'schen in so fern als sie ausgehend von Voraussetzungen, welche der ganzen Geometrie zu Grunde liegen, zum Riemann'schen Ausgangspunkt, d. h. zu der von Riemann acceptirten Form des Linienelements als der einzig zulässigen zurückführen.

Um den allgemeinsten Ausdruck mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten zu finden, in denen die verlangte Art von Bewegung möglich ist, macht H. Helmholtz diejenigen Voraussetzungen, unter denen allein von Congruenz und also auch von Raummessung die Rede sein kann, da ja alle ursprüngliche Raummessung auf Constatirung der Congruenz beruht. Diese Voraussetzungen beziehen sich:

- 1) Auf die Continuität und Dimension des Raums.

Der Punkt im Raum ist der Lage nach durch die Abmessung von n continuirlich veränderlichen Grössen bestimmt, die von einander unabhängig sind. Jeder Bewegung eines Punktes entspricht eine continuirliche Änderung mindestens einer der als Coordinaten dienenden Grössen. Dabei ist unter der Continuität nicht nur verstanden, dass alle zwischen den Endwerthen der sich ändernden Grössen liegenden Zwischenwerthe durchlaufen werden, sondern dass auch Differenzialquotienten existiren.

2) Auf die Existenz beweglicher und in sich fester Körper.

Bei jedem in sich festen aber im Raum beweglichen Körper besitzen je zwei Punkte einen unveränderlichen Abstand; zwischen den $2n$ Coordinaten jedes Punktpaares muss demnach eine Gleichung bestehen, welche von der Bewegung unabhängig und für alle congruenten Punktpaare die gleiche ist; congruent heissen aber solche Punktpaare, welche nach einander mit demselben im Raum festen Punktpaar zusammenfallen können. Obgleich über die Art der Gleichung nichts weiter gesagt ist, so ist sie doch in enge Grenzen eingeschlossen, weil bei der Vermehrung der Punktzahl die Anzahl der Gleichungen viel schneller wächst als die Zahl der durch sie bestimmten Coordinaten der Punkte; fünf Punkte geben z. B. zehn Punktpaare, also zehn Gleichungen, welche im dreidimensionalen Raum fünfzehn veränderliche Coordinaten enthalten, von denen jedoch sechs frei verfügbar bleiben müssen, wenn das feste System der fünf Punkte frei beweglich und drehbar sein soll. Es dürfen also nur neun Coordinaten durch jene zehn Gleichungen bestimmt werden als abhängig von jenen sechs veränderlichen. Die überzählige zehnte Gleichung muss sich demnach aus den neun übrigen herleiten lassen. Bei m Punkten im Raum von n Dimensionen erhält man $\frac{m(m-1)}{2}$ Gleichungen mit mn veränderlichen Coordinaten. Wegen der freien Beweglichkeit müssen von den letztern $\frac{n(n-1)}{2}$ unbestimmt bleiben; die Anzahl der unabhängigen Coordinaten beträgt folglich nur $mn - \frac{n(n-1)}{2}$; d. h. es sind, wenn $m > n+1$ ist, $\frac{1}{2}(m-n)(m-n-1)$ überzählige Gleichungen vorhanden, und da alle diese Gleichungen in analoger Weise gebildet sein müssen, so liegt hierin eine Bedingung, die nur durch besondere Arten von Gleichungen erfüllt werden kann.

3) Bezieht sich eine Voraussetzung auf die freie Beweglichkeit. Jeder

Punkt muss auf continuirlichem Weg zu jedem andern übergehen können. Für die einzelnen Punkte eines festen Systems bestehen nur die Einschränkungen der Bewegung, welche durch die zwischen den Coordinaten von je zwei Punkten bestehenden Gleichungen bedingt sind. Kann ein festes Punktsystem A in einer gewissen Lage mit einem zweiten Punktsystem B zur Congruenz gebracht werden, so kann dies auch in jeder andern Lage geschehen d. h. die Congruenz von zwei Raumgebilden ist nicht von ihrer Lage abhängig oder alle Theile des Raumes sind, wenn von ihrer Begrenzung abgesehen wird, unter einander congruent.

4) Die vierte Voraussetzung bezieht sich auf die Unabhängigkeit fester Körper von der Drehung, eine Eigenschaft, welche der Monodromie der Functionen einer complexen Variablen analog ist. Wenn ein Körper sich um $n-1$ seiner Punkte dreht und dieselben so gewählt sind, dass seine Stellung nur noch von einer unabhängigen Variablen abhängt, so führt fortgesetzte Drehung ohne Umkehr in die Anfangslage zurück, von der sie ausgegangen ist. Diese letztere Eigenschaft der Körper braucht nicht nothwendig vorhanden zu sein, wenn auch die drei ersten Bedingungen erfüllt sind. Die Geometrie setzt sie stillschweigend voraus, wenn sie den Kreis als eine geschlossene Curve behandelt. Sie setzt die Postulate 2) und 3) bei den Congruenzsätzen voraus, da die Existenz in sich fester und frei beweglicher Körper von den dort angegebenen Eigenschaften die Vorbedingung jeder Congruenz bildet. Sie setzt ferner die Continuität und die Dimension des Raumes voraus. Diese Sätze sind hier eben nur in ein analytisches Gewand gekleidet.

Sobald diesen vier Bedingungen Genüge geleistet wird, folgt wie H. Helmholtz für einen Raum von drei Dimensionen nachgewiesen hat, dass eine homogene Function zweiten Grades der drei Differenzialien dx_i der Coordinaten von zwei unendlich nahen Punkten existirt, welche bei der Bewegung dieser beiden fest verbundenen Punkte unverändert bleibt und also ein von der Richtung unabhängiges Mass des Linienelementes vorstellt.

Damit hatte H. Helmholtz den Riemannschen Ausgangspunkt gewonnen und dessen Hypothese als Folgerung aus viel weniger beschränkten Annahmen hergeleitet. Da bei der Helmholtz'schen Untersuchung die oben aufgestellten Postulate II bis IV, welche die Möglichkeit der Congruenz zwischen verschiedenen Theilen des Raumes aussprechen, hiebei nur auf unendlich kleine Raum-

elemente angewendet worden ist, so ergibt sich, dass Riemanns Annahme identisch ist mit der, dass der Raum monodrom sei und unendlich kleine Raumelemente von der Begrenzung abgesehen, congruent seien. Wird die Congruenz endlicher Theile des Raumes unabhängig von der Begrenzung und in allen möglichen Drehungen gefordert, so muss das Krümmungsmass des Raums allenthalben constant sein. Nimmt man die Dimensionszahl gleich drei an und setzt neben der Ausdehnung des Raumes ins Unendliche den Werth vom Krümmungsmass gleich null voraus, so ergibt sich für einen solchen Raum ein System der Geometrie, welches identisch ist mit dem, welches uns Euklid überliefert hat.

Die Untersuchungen von Riemann und Helmholtz zeigen also zusammengekommen, dass unser Raum zu definiren ist als eine dreidimensionale, in sich congruente, ebene Mannigfaltigkeit. Die Grundlage der euklidischen Raumlehre bilden demnach folgende Axiome und Postulate:

- I) Der Raum ist eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.
- II) Der Raum ist eine in sich congruente Mannigfaltigkeit.

Postulate hiezu:

- 1) es existiren feste Körper,
- 2) die festen Körper sind frei beweglich,
- 3) die festen Körper verändern ihre Gestalt nicht durch eine Drehung um eine Rotationsaxe.

- III) Der Raum ist eine ebene Mannigfaltigkeit d. h.

- a) zwischen zwei Punkten ist nur eine Kürzeste möglich,
- b) die Summe der Winkel eines Dreiecks ist gleich zwei Rechten.

Das erste und zweite Axiom kommen allen drei Geometrieen, der sphärischen, euklidischen und pseudosphärischen zu; der erste Satz von der Ebenheit trennt die sphärische Geometrie von den beiden andern und der zweite scheidet die pseudosphärische von der euklidischen Geometrie ⁽⁷⁴⁾.

Es erübrigt uns jetzt noch die Aufmerksamkeit auf zwei Arbeiten hinzulenken, welche sich beide auf das Krümmungsmass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnungen beziehen.

H. Kronecker ⁽⁸¹⁾ ist durch seine schönen Untersuchungen über die Charakteristik eines Systems von Funktionen mehrerer Veränderlichen auf den engen Zusammenhang zwischen dieser Charakteristik und der Gauss'schen

curvatura integra geführt worden und diese Untersuchungen haben ihn darauf geleitet, die Theorie der Krümmung auf Funktionen von n Variablen zu übertragen. Leider hat H. Kronecker bis jetzt nur einige Andeutungen darüber der Öffentlichkeit übergeben. Darnach lassen sich die für die Oberflächen geltenden Betrachtungen in sehr einfacher und eleganter Weise verallgemeinern und die analytischen Resultate bleiben durchaus erhalten, wenn man an die Stelle von drei Raumcoordinaten n Veränderliche einführt.

H. Kronecker heisst eine durch $(n-\nu)$ lineare Gleichungen aus einer n fachen Mannigfaltigkeit ausgeschiedene Mannigfaltigkeit von ν Dimensionen eine „ebene“. Zu einer ebenen Linie sind also $n-1$, zu einer ebenen Fläche $n-2$ lineare Gleichungen nothwendig. Dann definirt er die Normale in einem Punkt $(z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$ einer beliebigen $(n-1)$ fachen Mannigfaltigkeit $F_0(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$ und legt durch diesen Punkt z^0 eine ebene $(n-1)$ fache Mannigfaltigkeit, welche die vorige dort berührt. Eine zweifache ebene Mannigfaltigkeit durch den Berührungspunkt schneidet in F_0 eine Linie aus, zu welcher ein bestimmter Krümmungsradius im Punkt z^0 gehört und dieser steht zum Krümmungsradius des entsprechenden Normalschnittes in einer Beziehung, welche nur eine Erweiterung des Satzes von Meusnier vorstellt. — In der berührenden Mannigfaltigkeit existiren $(n-1)$ zu einander normale ebene Linien, deren Normalschnitte Krümmungsradien $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ haben, welche den Hauptkrümmungsradien der Oberflächen entsprechen; für sie gilt eine Formel, welche der von Euler angegebenen ganz analog ist. Weiter folgt, dass es auf der Normalen p des Punktes z^0 $(n-1)$ Punkte gibt, in denen dieselbe von einer benachbarten Normalen getroffen werden und die zugehörigen Werthe von p sind jene Grössen $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ — Der reciproke Werth des Produkts $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ repräsentirt das Gauss'sche Krümmungsmass der $(n-1)$ dimensionalen Mannigfaltigkeit $F_0(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$ im Punkt z^0 ; denn wenn man die Gauss'sche Bestimmungsweise des Krümmungsmasses auf letztere Mannigfaltigkeit ausdehnt, indem man die Normalen derselben mit denjenigen der kugelförmigen Mannigfaltigkeit

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = 1$$

vergleicht, so erhält man die dem Krümmungsmass entsprechende Grösse:

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1}} = \frac{1}{S^{n-1}} \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \dots & F_n \\ F_1 & F_{11} & F_{21} & \dots & F_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_n & F_{1n} & F_{2n} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\text{worin } S = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2}; \quad \frac{\partial F_0}{\partial x_i} = F_i; \quad \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_i \partial x_k} = F_{ik}$$

Für allgemeine Systeme $F_0, F_1, \dots, F_n$ tritt dann an Stelle des Gauss'schen Krümmungsmasses das Kummer'sche Dichtigkeitsmass. Näheres darüber möge in der Originalabhandlung selbst nachgesehen werden.

In sehr einfacher und klarer Weise hat H. BEEZ⁽⁸²⁾ den Ausdruck für das Krümmungsmass gewonnen. Er betrachtet die n fache Mannigfaltigkeit, welche vermöge der Gleichung

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$$

aus einer einfachen Mannigfaltigkeit ausgesondert wird. Auf $F = 0$ wird der Punkt $A(x_0, x_1, \dots, x_n)$ angenommen und in seiner Umgebung die n unendlich nahen Punkte $A_i(x_0 + d_i x_0, \dots, x_n + d_i x_n)$ für $(i=1, 2, \dots, n)$, so dass

$$F_0 d_i x_0 + F_1 d_i x_1 + \dots + F_n d_i x_n = 0 \text{ ist, wenn}$$

$$F_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} \text{ und } (k = 0, 1, \dots, n.)$$

Ein anderer Punkt $B(y_0, y_1, \dots, y_n)$ liege ausserhalb F , dann wird das Volumen des durch A, A_i und B gebildeten Parallelepipeds ausgedrückt durch

$$R = \begin{vmatrix} z_0 - x_0 & d_1 x_0 & d_2 x_0 & \dots & d_n x_0 \\ y_1 - x_1 & d_1 x_1 & d_2 x_1 & \dots & d_n x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n - x_n & d_1 x_n & d_2 x_n & \dots & d_n x_n \end{vmatrix}$$

Repräsentiren $dw_0, \dots, dw_n$ die Partialdeterminanten der ersten Colonne und ist dw definirt durch $dw^2 = \sum dw_k^2$, $(k = 0, 1, \dots, n)$, so ergeben sich sofort die Gleichungen

$$\sum dw_k d_i x_k = 0; \quad \frac{dw_k}{F_k} = \text{const. und } \frac{dw_k}{dw} = \frac{F_k}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2}}$$

Ferner stellt $\frac{dw_k}{dw}$ den Richtungscosinus der in A auf $F = 0$ errichteten Normalen vor, und da

$$R = \sum dw_k(y_k - x_k), \text{ so ist } \frac{R}{(AB)dw} = \sum \frac{dw_k}{dw} \cdot \frac{y_k - x_k}{(AB)},$$

wo (AB) die Entfernung der beiden Punkte A und B bedeuten soll. Die rechte Seite der letzten Gleichung repräsentiert den Cosinus des Winkels φ , den die Normale gegen (AB) bildet; also ist

$$dw = \frac{R}{(AB)\cos\varphi}.$$

$(AB)\cos\varphi$ kann jetzt als die Höhe des Parallelepipeds angesehen werden, dessen Basis $= dw$ ist; dw stellt demnach ein kleines Element der gegebenen Mannigfaltigkeit $F=0$ dar.

Zur Ableitung des Krümmungsmasses von $F = 0$ wird die kugelförmige Mannigfaltigkeit

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$$

eingeführt und zwei Punkte x und ξ heißen correspondierend, falls

$$\xi_k = \frac{F_k}{\sqrt{F_0^2 + \dots + F_n^2}}$$

Sind ξ und $\xi + d_i \xi$ die corresp. Punkte zu x und $x + d_i x$ und setzt man analog

$$P = \begin{vmatrix} \eta_0 - \xi_0, & d_1 \xi_0, & \dots & d_n \xi_0, \\ \eta_1 - \xi_1, & d_1 \xi_1, & \dots & d_n \xi_1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_n - \xi_n, & d_1 \xi_n, & \dots & d_n \xi_n, \end{vmatrix}$$

und $(d\omega)^2 = \sum (d\omega_k)^2$, wo $d\omega_k$ die Partialdeterminante von $\eta_k - \xi_k$ sein soll, so wird

$$\frac{d\omega_k}{d\omega} = \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_0^2 + \dots + \xi_n^2}} = \xi_k$$

$$\text{und } \frac{d\omega_k}{d\omega} = \frac{dw_k}{dw}.$$

Das Gauss'sche Krümmungsmass $\frac{d\omega}{d\omega_k}$ ist also $= \frac{d\omega_k}{d\omega_k}$.

Ist die Mannigfaltigkeit in der Form $x_0 - f(x_1 \dots x_n) = 0$ gegeben, so nimmt das Krümmungsmass K die Form an:

$$K = \frac{(-1)^n}{s^{n+2}} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

worin $f_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$; $f_{ip} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_p}$ und $s = \sqrt{1 + f_1^2 + \dots + f_n^2}$

Für die Mannigfaltigkeit $F(x_0, \dots, x_n) = 0$ wird nach H. Kronecker

$$K = - \frac{1}{S^{n+2}} \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_1 & \dots & F_n \\ F_0 & F_{00} & F_{01} & \dots & F_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_n & F_{on} & F_{1n} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

wo $S = \sqrt{F_0^2 + \dots + F_1^2}$; $F_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$; $F_{ip} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_p}$, ($i, k, p = 0, 1 \dots n$)

eine Formel, die nach H. BEEZ identisch ist mit $K = \frac{(-1)^n U}{S^{n+2} F_0^{2n-2}}$,

wenn U eine Determinante n ten Grades, worin

$$U_{ki} = \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_k \\ F_0 & F_{00} & F_{ko} \\ F_i & F_{i0} & F_{ki} \end{vmatrix}; \quad (i, k = 1 \dots n).$$

Ist endlich die n fache Mannigfaltigkeit durch $(n+1)$ simultane Gleichungen:
 $x_k = f_k(p_1, p_2, \dots, p_n); \quad (k = 0, 1 \dots n)$
 gegeben und ist

$$A = \begin{vmatrix} y_0 - x_0 & \frac{\partial x_0}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial x_0}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n - x_n & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Lambda = \begin{vmatrix} \eta_0 - \xi_0 & \frac{\partial \xi_0}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \xi_0}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_n - \xi_n & \frac{\partial \xi_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

bedeuten ferner A_k und Λ_k die Partialdeterminanten,

von $y_k - x_k$, resp. $\eta_k - \xi_k$, und ist $H = \sqrt{A_0^2 + \dots + A_n^2}$, so

wird

$$K = \frac{1}{H^{n+2}} \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_n \\ \frac{\partial A_0}{\partial p_1} & \frac{\partial A_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial A_n}{\partial p_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial A_0}{\partial p_n} & \frac{\partial A_1}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial A_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

Für $D_{ik} = - \left(A_0 \frac{\partial^2 x_0}{\partial p_i \partial p_k} + A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i \partial p_k} + \dots + A_n \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i \partial p_k} \right)$

geht K über in

$$K = \frac{1}{H^{n+2}} \begin{vmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{vmatrix}$$

Für $n=2$ verwandelt sich diese Formel in den bekannten Gauss'schen Ausdruck

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}$$

falls $A_0=A$; $A_1=B$; $A_2=C$; $p_1=p$ und $p_2=q$
 $D_{11}=D$; $D_{12}=D_{21}=D'$ und $D_{22}=D''$ gesetzt wird.

Sie behält aber auch noch für $n=1$ ihre Giltigkeit und drückt in diesem Fall die Krümmung einer ebenen Curve d. h. den reciproken Werth des Krümmungshalbmessers aus.

Auf die Raumuntersuchungen mittelst der Theorie der Differenzialausdrücke mehrerer unabhängiger Variabelen, wie sie die Herrn Christoffel ⁽⁸³⁾, Lipschitz ⁽⁸⁴⁾, Voss ⁽⁸⁵⁾, Suworof ⁽⁸⁶⁾ u. A. in erschöpfender Weise durchgeführt haben, sowie auch die dagegen erhobenen Einwände soll in einer nachfolgenden Arbeit genauer eingegangen werden.

Tübingen im December 1880.

Wir liefern zuverlässig und rasch

**Alle Bücher
und Zeitschriften**

Schöne Literatur

Fachbücher

Bildbände

Alle Taschenbücher

Jugendchriften

Pädagogik

Theologie

Landkarten

Seit 1845 im Dienst am guten Buch



**Chr. Kaiser
Buchhandlung**

München, im Rathaus

Tel. 22 34 41

Haas, August

Versuch einer Darstellung der Geschichte des Krümmungsmasses Inaug.-Diss

Tübingen 1881

4 Math.p. 147 ch

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11505834-1